Βασικό Θέμα
Ανισότητες LOHAN JENSEN

LOHAN JENSEN: Δανός μαθηματικός που ασχολήθηκε με την ανάλυση, την άλγεβρα και την μηχανική. Συνέβαλε τα μέγιστα στην μελέτη των κυρτών συναρτήσεων. Εργαζόταν σε μια τηλεφωνική εταιρία. Πέθανε σε ηλικία 66 ετών (1859-1925).

Ζήτημα 1ο

Έστω f μια συνάρτηση με $f:\Re\to\Re$, κυρτή.

Τότε για κάθε $x_1, x_2 \in \Re$ ισχύει: $f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right) \le \dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ (1)

Απόδειξη

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

α) $x_1 = x_2$. Τότε η (1) γίνεται: $f(x_1) \le f(x_2)$ που είναι αληθής.

β) $x_1 \neq x_2$. β1) $x_1 < x_2$. Θέτουμε $x_0 = \dfrac{x_1+x_2}{2}$

(Σχόλιο: προφανώς x_0: μέσο του $[x_1, x_2]$)

οπότε η (1) γίνεται $f(x_0) \le \dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \Leftrightarrow 2f(x_0) \le f(x_1)+f(x_2) \Leftrightarrow$

$f(x_0) - f(x_1) \le f(x_2) - f(x_0)$ (2)

Θεωρούμε

$$\left.\begin{array}{r} f:[x_1, x_0] \\ f \text{ συνεχής στο } [x_1, x_0] \\ f \text{ παραγωγίσιμη στο } (x_1, x_0) \end{array}\right\} \underset{\text{μέσης τιμής διαφορικού λογισμού}}{\overset{\text{από Θεώρημα}}{\Rightarrow}}$$ θα υπάρχει ένα τουλάχιστον

$\xi_1 \in (x_1, x_0)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_1) = \dfrac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0 - x_1} = \dfrac{f(x_0)-f(x_1)}{\dfrac{x_1+x_2}{2} - x_1} = \dfrac{f(x_0)-f(x_1)}{\dfrac{x_2-x_1}{2}}$

$= 2\dfrac{f(x_0)-f(x_1)}{x_2 - x_1}$ (3)

θεωρούμε $$\left.\begin{array}{r} f:[x_0, x_2] \\ f: \text{συνεχής στο } [x_0, x_2] \\ f: \text{παραγωγίσιμη στο } (x_0, x_2) \end{array}\right\} \overset{\Theta.M.T.\Delta.\Lambda.}{\Rightarrow}$$ θα υπάρχει ένα τουλάχιστον

$\xi_2 \in (x_0, x_2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_2) = \dfrac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2 - x_0} = \dfrac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2 - \dfrac{x_1+x_2}{2}} = \dfrac{f(x_2)-f(x_0)}{\dfrac{x_2-x_1}{2}}$

$= 2\dfrac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_1}$ (4).

Προφανώς $\xi_1 < \xi_2$ και επειδή η f' είναι γνησίως αύξουσα $f'(\xi_1) < f'(\xi_2)$ άρα λόγω (3), (4) $2\dfrac{f(x_0) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 2\dfrac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_1}$ οπότε καταλήγουμε στην
$f(x_0) - f(x_1) < f(x_2) - f(x_0)$ (2).

β_2) $x_2 < x_1$. Εργαζόμαστε αντίστοιχα στο διάστημα $[x_2, x_1]$.

<u>Ζήτημα 2ο</u>

Έστω f μια συνάρτηση με $f : \Re \to \Re$, κυρτή.

Τότε για κάθε $x_1, x_2 \in \Re$ και για κάθε $\lambda \in (0,1)$ ισχύει
$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$ (1)

<u>Απόδειξη</u>

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:
α) $x_1 = x_2$. Τότε η (1) γίνεται $f(x_1) \le f(x_2)$ που ισχύει
β) $x_1 \neq x_2$
β1) $x_1 < x_2$. Θέτουμε: $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 = x_0$ και $\lambda = \dfrac{\alpha}{\beta}$ (χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε $\alpha, \beta > 0$). <u>Σχόλιο:</u> Αφού $\lambda < 1 \Leftrightarrow \alpha < \beta$.

Τότε η (1) γίνεται: $f(x_0) \le \dfrac{\alpha}{\beta} f(x_1) + \dfrac{\beta - \alpha}{\beta} f(x_2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \beta \cdot f(x_0) \le \alpha \cdot f(x_1) + (\beta - \alpha) f(x_2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow [\alpha - (\alpha - \beta)] f(x_0) \le \alpha \cdot f(x_1) + (\beta - \alpha) f(x_2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha [f(x_0) - f(x_1)] \le (\beta - \alpha)[f(x_2) - f(x_0)]$. (2)

<u>Σχόλιο:</u> $x_1 < x_0 < x_2 \Leftrightarrow x_1 < \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 < x_2$ διότι

$\begin{cases} x_1 < \lambda x_1 + x_2 - \lambda x_2 \\ \lambda x_1 + x_2 - \lambda x_2 < x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-\lambda)x_1 < (1-\lambda)x_2 \\ \lambda (x_1 - x_2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 < x_2 \\ x_1 < x_2 \end{cases}$ που ισχύει.

Θεωρούμε

$\left. \begin{array}{r} f : [x_1, x_0] \\ f : \text{συνεχής στο } [x_1, x_0] \\ f : \text{παραγωγίσιμη στο } (x_1, x_0) \end{array} \right\} \overset{\text{Θ.Μ.Τ.Δ.Λ.}}{\Rightarrow}$ θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1 \in (x_1, x_0)$

τέτοιο ώστε: $f'(\xi_1) = \dfrac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} = \dfrac{f(x_0) - f(x_1)}{\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 - x_1} = \dfrac{f(x_0) - f(x_1)}{(\lambda - 1)(x_1 - x_2)} =$

$$= \frac{f(x_0)-f(x_1)}{\left(\frac{\alpha}{\beta}-1\right)(x_1-x_2)} = \frac{f(x_0)-f(x_1)}{\frac{\alpha-\beta}{\beta}(x_1-x_2)} = \frac{\beta}{\alpha-\beta}\cdot\frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_1-x_2} \quad (3)$$

Θεωρούμε

$$\left.\begin{array}{r} f:[x_0,x_2] \\ f\ \text{συνεχής στο}\ [x_0,x_2] \\ f:\text{παραγωγίσιμη στο}\ (x_0,x_2) \end{array}\right\} \overset{\Theta.\text{Μ}.\text{Τ}.\Delta.\Lambda.}{\Rightarrow}$$ θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_2 \in (x_0,x_2)$

τέτοιο ώστε: $f'(\xi_2) = \frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0} = \frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-\lambda x_1-x_2+\lambda x_2} = \frac{f(x_2)-f(x_0)}{\lambda(x_2-x_1)} =$

$$= \frac{f(x_2)-f(x_0)}{\frac{\alpha}{\beta}(x_2-x_1)} = \frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_1} \quad (4)$$

Προφανώς $\xi_1 < \xi_2$ και επειδή η f' είναι γνησίως αύξουσα τότε

$f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \Leftrightarrow$ λόγω (3), (4)

$$\frac{\beta}{\alpha-\beta}\cdot\frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_1-x_2} < \frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_1} \Leftrightarrow$$

$$\frac{-1}{\alpha-\beta}\cdot\frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_2-x_1} < \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_1} \Leftrightarrow$$

$$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{\alpha-\beta} < \frac{f(x_2)-f(x_0)}{\alpha} \Leftrightarrow$$

$$\alpha(f(x_1)-f(x_0)) > (\alpha-\beta)(f(x_2)-f(x_2)) \Leftrightarrow$$

$$\alpha(f(x_0)-f(x_1)) < (\beta-\alpha)(f(x_2)-f(x_0)) \quad (2)$$

β2) $x_1 > x_2$. Εργαζόμαστε ομοίως στο $[x_2,x_1]$.

<u>Σχόλιο:</u> Η παραπάνω απόδειξη θα μπορούσε να γίνει χωρίς χρήση των α,β αυτό όμως έγινα για να γίνει καλύτερη η κατανόηση του ζητήματος 3 από το μαθητή.

<u>Ζήτημα 3ο</u>

Έστω μια συνάρτηση f : κυρτή σ' ένα διάστημα Δ.

Τότε για κάθε $x_1, x_2, ..., x_\nu \in \Delta$ και για κάθε $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\nu$ με $\nu \geq 2$ μη αρνητικούς πραγματικούς αριθμούς με $\lambda_1+\lambda_2+...+\lambda_\nu = 1$ ισχύει:

$$f(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+...+\lambda_\nu x_\nu) \leq \lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)+...+\lambda_\nu f(x_\nu) \quad (1)$$

<u>Απόδειξη</u>

Η απόδειξη θα γίνει με τη βοήθεια της μαθηματικής επαγωγής.

<u>1ο βήμα:</u> $P(2): f(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2) \leq \lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)$ ισχύει λόγω του <u>2ου ζητήματος</u>.

<u>2</u>

2ο βήμα: Δεχόμαστε την αλήθεια της $P(\nu)$ δηλαδή
$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_\nu x_\nu) \le \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + ... + \lambda_\nu f(x_\nu)$.

3ο βήμα: Αρκεί να δείξουμε ότι ισχύει η $P(\nu+1)$ δηλαδή
$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_\nu x_\nu + \lambda_{\nu+1} x_{\nu+1}) \le \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + ... + \lambda_\nu f(x_\nu) + \lambda_{\nu+1} f(x_{\nu+1})$ (2)

Θέτουμε $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + .. + \lambda_\nu$ και $\mu = \lambda_{\nu+1}$ τότε $\lambda + \mu = 1$.

- Αν $\lambda = 0$ τότε $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_\nu = 0$ και $\mu = 1$ οπότε
  $f(\lambda_1 x_1 + ... + \lambda_\nu x_\nu + \lambda_{\nu+1} x_{\nu+1}) = f(x_{\nu+1})$ δηλαδή ισχύει η (2) με ισότητα.
- Αν $\lambda > 0$ τότε έστω $m = \min\{x_1, x_2, ..., x_\nu\}$ και $M = \max\{x_1, x_2, .., x_\nu\}$.

Θέτω $y_1 = \dfrac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_\nu x_\nu}{\lambda}$.

Τότε $m \le y_1 \le M$ διότι: $m \le x_1 \le M$ άρα
$$m\lambda_1 \le \lambda_1 x_1 \le \lambda_1 M$$
ομοίως
$$\begin{array}{l} m\lambda_2 \le \lambda_2 x_2 \le \lambda_2 M \\ m\lambda_\nu \le \lambda_\nu x_\nu \le \lambda_\nu M \qquad + \\ \hline m\lambda \le \lambda_1 x_1 + ... + \lambda_\nu x_\nu \le M\lambda \Leftrightarrow \\ m \le \dfrac{\lambda_1 x_1 + ... + \lambda_\nu x_\nu}{\lambda} \le M \end{array}$$
άρα $m \le y_1 \le M$.

Αν θέσουμε $y_2 = x_{\nu+1}$ έχουμε
$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_\nu x_\nu + \lambda_{\nu+1} x_{\nu+1}) = f(\lambda y_1 + \mu y_2) \le \lambda f(y_1) + \mu f(y_2)$ (λόγω $P(2)$) =
$$= \lambda f\left(\frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_\nu x_\nu}{\lambda}\right) + \lambda_{\nu+1} f(x_{\nu+1}) =$$
$$= \lambda f\left(\frac{\lambda_1}{\lambda} x_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda} x_2 + ... + \frac{\lambda_\nu}{\lambda} x_\nu\right) + \lambda_{\nu+1} f(x_{\nu+1}) \le$$
$$\le \lambda\left(\frac{\lambda_1}{\lambda} f(x_1) + \frac{\lambda_2}{\lambda} f(x_2) + ... + \frac{\lambda_\nu}{\lambda} f(x_\nu)\right) + \lambda_{\nu+1} f(x_{\nu+1})$$
(λόγω της $P(\nu)$ αφού $\frac{\lambda_1}{\lambda} + \frac{\lambda_2}{\lambda} + ... + \frac{\lambda_\nu}{\lambda} = 1$)
$$= \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + ... + \lambda_\nu f(x_\nu) + \lambda_{\nu+1} f(x_{\nu+1}).$$

Σχόλιο: Προφανώς όταν η f είναι κοίλη στο Δ θα ισχύει:
$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_\nu x_\nu) \ge \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + ... + \lambda_\nu f(x_\nu)$.

Ζήτημα 4ο

Να αποδείξετε ότι:

α) $\sqrt[\nu]{\eta\mu x_1 \cdot \eta\mu x_2 \cdot \ldots \cdot \eta\mu x_\nu} \le \eta\mu \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_\nu}{\nu}$ αν $x_1, x_2, \ldots, x_\nu \in (0,\pi)$.

β) σε κάθε τρίγωνο $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}$ ισχύει: $\eta\mu \mathrm{A} \cdot \eta\mu \mathrm{B} \cdot \eta\mu \Gamma \le \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$.

Απόδειξη

α) Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = \ln(\eta\mu x)$ με $f : (0,\pi) \to \Re$.

Τότε $f'(x) = \dfrac{1}{\eta\mu x} \cdot \sigma\upsilon\nu x = \sigma\varphi x$, $f''(x) = -\dfrac{1}{\eta\mu^2 x} < 0$ στο $(0,\pi)$.

Άρα η f : κοίλη οπότε λόγω του θεωρήματος 3

$$f\left(\frac{1}{\nu}x_1 + \frac{1}{\nu}x_2 + \ldots + \frac{1}{\nu}x_\nu\right) \ge \frac{1}{\nu}f(x_1) + \frac{1}{\nu}f(x_2) + \ldots + \frac{1}{\nu}f(x_\nu)$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\eta\mu \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_\nu}{\nu}\right) \ge \frac{\ln(\eta\mu x_1) + \ln(\eta\mu x_2) + \ldots + \ln(\eta\mu x_\nu)}{\nu}$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\eta\mu \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_\nu}{\nu}\right) \ge \frac{1}{\nu}\ln(\eta\mu x_1 \cdot \eta\mu x_2 \cdot \ldots \cdot \eta\mu x_\nu)$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_\nu}{\nu} \ge \sqrt[\nu]{\eta\mu x_1 \cdot \eta\mu x_2 \cdot \ldots \cdot \eta\mu x_\nu}.$$

β) Αφού το $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}$ είναι τρίγωνο τότε $\mathrm{A} + \mathrm{B} + \Gamma = \pi$ άρα χρησιμοποιώντας το (α) για $\nu = 3$ έχουμε $\sqrt[3]{\eta\mu \mathrm{A} \cdot \eta\mu \mathrm{B} \cdot \eta\mu \Gamma} \le \eta\mu \dfrac{\mathrm{A} + \mathrm{B} + \Gamma}{3} = \eta\mu \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Άρα $\eta\mu \mathrm{A} \cdot \eta\mu \mathrm{B} \cdot \eta\mu \Gamma \le \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$.

<u>Ζήτημα 5$^{\text{o}}$):</u> (Θέμα Πανελληνίων Εξετάσεων 1997)
Δίνεται πραγματική συνάρτηση g 2 φορές παραγωγίσιμη στο $\Re$ τέτοια ώστε $g(x) > 0$ και $g''(x)g(x) - [g'(x)]^2 > 0$ για κάθε $x \in \Re$. Να αποδείξετε ότι:

α) η $\dfrac{g'}{g}$ είναι γνησίως αύξουσα

β) $g\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}\right) \le \sqrt{g(x_1)g(x_2)}$ για κάθε $x_1, x_2 \in \Re$.

Λύση

α) $\left(\dfrac{g'(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{g''(x)g(x) - (g'(x))^2}{g^2(x)} > 0$.

Άρα η συνάρτηση $\dfrac{g'(x)}{g(x)}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\Re$.

β) Θεωρώ την $h(x) = \ln g(x)$.

$$h'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)},\ h''(x) = \frac{g''(x)g(x) - (g'(x))^2}{g^2(x)} > 0 .$$

Άρα h : κυρτή άρα λόγω <u>ζητήματος 2</u>

$$h\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \le \frac{h(x_1) + h(x_2)}{2} \Leftrightarrow$$

$$\ln g\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \le \frac{\ln g(x_1) + \ln g(x_2)}{2} \Leftrightarrow \ln g\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \le \ln \sqrt{g(x_1)g(x_2)}$$

$$\Leftrightarrow g\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \le \sqrt{g(x_1)g(x_2)}.$$

<u>Σχόλιο:</u> Το συγκεκριμένο θέμα απευθυνόταν σε <u>πάρα πολύ καλά</u> διαβασμένους μαθητές.

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΘΕΜΑΤΩΝ
ΜΠΑΤΖΑΚΑΣ ΜΙΧΑΛΗΣ
ΠΕΤΡΟΠΟΥΛΟΣ ΓΙΑΝΝΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ