ΘΕΜΑ Α

$\boxed{A_1}$ Σχολικό σελ.99.

$\boxed{A_2}$ α) Ψ

β) Η $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x}, & x<0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$ είναι 1 - 1 στο $\mathbb{R}$ αλλά δεν είναι γνησίως μονότονη.

$\boxed{A_3}$ Σχολικό σελ.216.

$\boxed{A_4}$ α) Λάθος

β) Λάθος

γ) Σωστό

δ) Σωστό

ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1 $f'(x) = 1 - \dfrac{-8x}{x^4} = 1 + \dfrac{8}{x^3}$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{8}{x^3} = -1 \Leftrightarrow x^3 = -8 \Leftrightarrow x = -2$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 + \dfrac{8}{x^3} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{8 + x^3}{x^3} > 0$

x	$-\infty$	-2		0		$+\infty$
$8+x^3$	$-$	0	$+$	‖	$+$	
x^3	$-$		$-$	‖	$+$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	‖	$+$	
$f(x)$	↗	τ.max	↘	‖	↗	

τ.max $= f(-2) = -2 - 1 = -3$

Β2 $f''(x) = \dfrac{-8 \cdot 3x^2}{x^6} = -\dfrac{24}{x^4}$

x	$-\infty$	0		$+\infty$
$f''(x)$	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	∩	‖	∩	

Δεν έχει σ.κ.

$\boxed{B_3}$ $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}\left(x - \frac{4}{x^2}\right) = 0 - (+\infty) = -\infty$

αφού $\lim\limits_{x\to 0^-} x^2 = 0$ και $x^2 > 0$ κοντά στο 0^-

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(x - \frac{4}{x^2}\right) = 0 - (+\infty) = -\infty$

αφού $\lim\limits_{x\to 0^-} x^2 = 0$ και $x^2 > 0$ κοντά στο 0^+

άρα: η $x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty}\left(x - \frac{4}{x^2}\right) = -\infty - 0 = -\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

αφού $\lim\limits_{x\to -\infty} x^2 = +\infty = \lim\limits_{x\to +\infty} x^2$

Άρα η C_f δεν έχει οριζόντιες ασύμπτωτες.

$\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to -\infty}\left(1 - \frac{4}{x^3}\right) = 1 - 0 = 1 = \lambda$

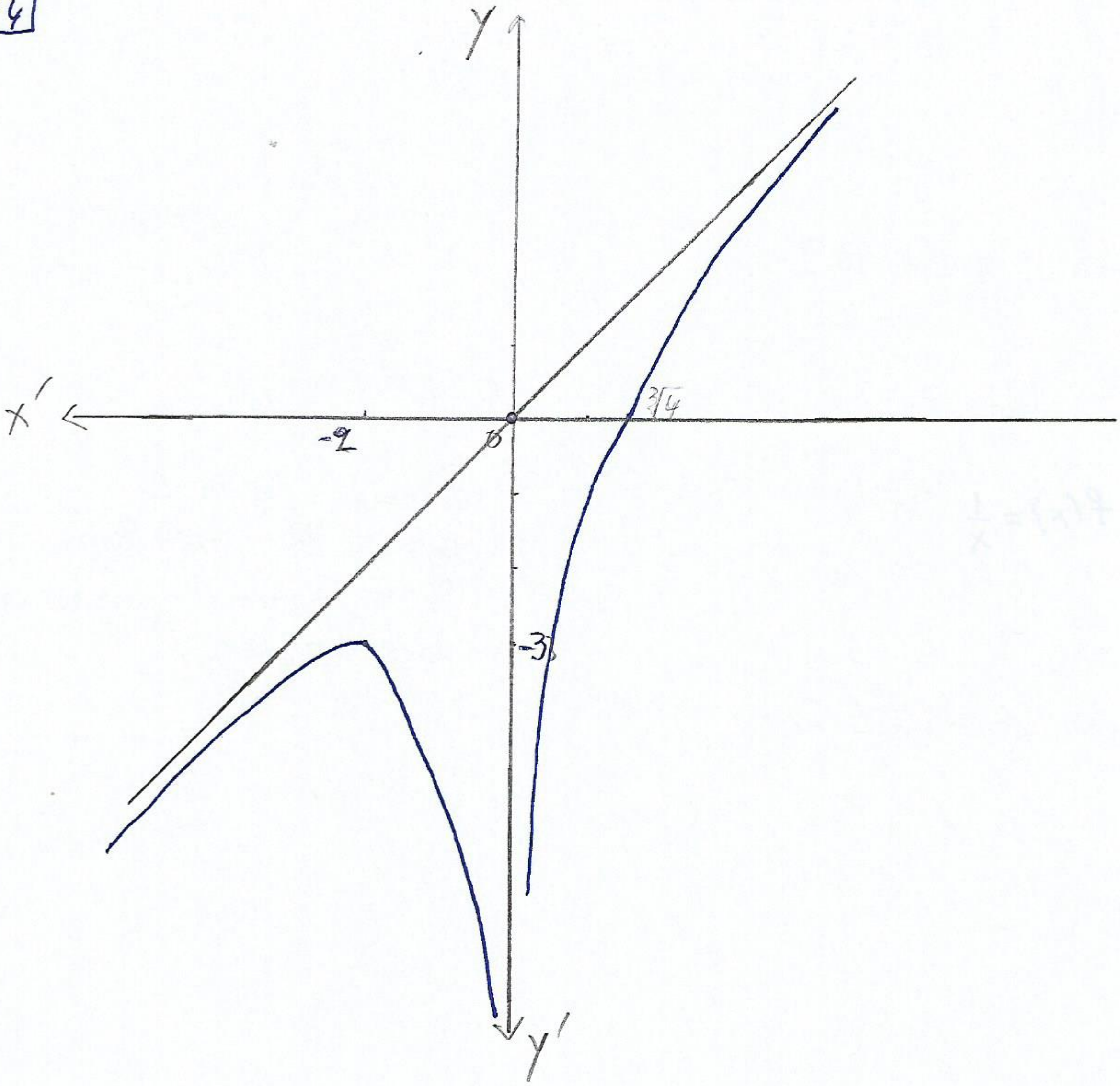
$\lim\limits_{x\to -\infty} [f(x) - x] = \lim\limits_{x\to -\infty}\left(-\frac{4}{x^2}\right) = 0 = \beta$

Ομοίως: $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 = \lambda$ και

$\lim\limits_{x\to +\infty} [f(x) - x] = 0 = \beta$

άρα: η $y = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$ και στο $+\infty$.

$\boxed{B_4}$



x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
f	$-\infty$	$\nearrow$	-3	$\searrow$ $-\infty$	$\Vert$	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

$$f(x)=0 \iff x-\frac{4}{x^2}=0 \iff x=\frac{4}{x^2} \iff x^3=4 \iff x=\sqrt[3]{4}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1 Αν ρ η ακτίνα του κύκλου ~~....~~ τότε:

$\Pi_{\tau\varepsilon\tau\rho.} = x \Rightarrow 4a = x \Rightarrow a = \frac{x}{4}$ m και

$\Pi_{\kappa\upsilon\kappa.} = 8 - x \Rightarrow 2\pi\rho = 8 - x \Rightarrow \rho = \frac{8-x}{2\pi}$ m

Άρα: $E_{\tau\varepsilon\tau\rho.} = \left(\frac{x}{4}\right)^2 = \frac{x^2}{16}$ m^2 και

$E_{\kappa\upsilon\kappa} = \pi \cdot \left(\frac{8-x}{2\pi}\right)^2 = \frac{\pi(8-x)^2}{4\pi^2} = \frac{(8-x)^2}{4\pi}$

Οπότε:

$$E(x) = \frac{x^2}{16} + \frac{(8-x)^2}{4\pi} = \frac{\pi \cdot x^2 + 4(64 - 16x + x^2)}{16\pi} =$$

$$= \frac{(\pi+4)x^2 - 64x + 256}{16\pi}, \quad x \in (0,8)$$

Γ2 Έχουμε: $E'(x) = \frac{(\pi+4)\cdot 2x - 64}{16\pi} = \frac{(\pi+4)\cdot x - 32}{8\pi}, x \in (0,8)$

$E'(x) = 0 \Leftrightarrow (\pi+4)x = 32 \Leftrightarrow x = \frac{32}{\pi+4} = \kappa$

$E'(x) > 0 \overset{8\pi>0}{\Longleftrightarrow} (\pi+4)x > 32 \Longleftrightarrow x > \frac{32}{\pi+4}$

x	0		κ		8
$E'(x)$		$-$	0	$+$	
$E(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Άρα το εμβαδόν ελαχιστοποιείται για $x = \kappa = \frac{32}{\pi+4}$

τότε: $\alpha = \frac{x}{4} = \frac{\frac{32}{\pi+4}}{4} = \frac{8}{\pi+4}$ m και

$\delta = 2\rho = 2 \cdot \frac{8-x}{2\pi} = 2\,\frac{8 - \frac{32}{\pi+4}}{2\pi} = \frac{8\pi + 32 - 32}{\pi(\pi+4)} = \frac{8\pi}{\pi(\pi+4)} = \frac{8}{\pi+4}$ m

$\boxed{\Gamma_3}$ $E((0,\kappa)) \overset{E\searrow}{=} \left(\lim_{x\to\kappa^-} E(x), \lim_{x\to 0^+} E(x)\right) = \left(\frac{16}{\pi+4}, \frac{16}{\pi}\right)$

και $E([\kappa,8)) \overset{E\nearrow}{=} \left[\frac{16}{\pi+4}, 4\right)$

Αφού $5 \notin E([\kappa,8)) = \left[\frac{16}{\pi+4}, 4\right)$

και $5 \in E((0,\kappa)) = \left(\frac{16}{\pi+4}, \frac{16}{\pi}\right)$ και η $E(x)$ είναι συνεχής και $\searrow$ στο $(0,\kappa)$ άρα θα υπάρχει μοναδικός αριθμός $x_0 \in (0,\kappa)$: $E(x_0) = 5$ m^2