

Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού

Ορισμός:

Η απόλυτη τιμή ενός πραγματικού αριθμού α παριστάνει την απόστασή του από το μηδέν, πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών, και συμβολίζεται με $|\alpha|$.

Π.χ.: $|5| = 5$, $|-4| = 4$, $|0| = 0$

Επομένως:

Η απόλυτη τιμή ενός μη αρνητικού αριθμού είναι ο ίδιος ο αριθμός.

Η απόλυτη τιμή ενός αρνητικού αριθμού είναι ο αντίθετός του.

Δηλαδή:

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha, & \text{αν } \alpha \geq 0 \\ -\alpha, & \text{αν } \alpha < 0 \end{cases}$$

Απ' τον ορισμό προκύπτουν άμεσα τα παρακάτω:

- ✓ $|\alpha| = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$
- ✓ $|\alpha| = |- \alpha|$
- ✓ $|\alpha| = \alpha \Leftrightarrow \alpha \geq 0$ και $|\alpha| \neq \alpha \Leftrightarrow \alpha < 0$
- ✓ $|\alpha| = -\alpha \Leftrightarrow \alpha \leq 0$ και $|\alpha| \neq -\alpha \Leftrightarrow \alpha > 0$

Ιδιότητες:

- $|\alpha| \geq 0$, άρα $|\alpha| > 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0$
- $|\alpha| \geq \alpha$ και $|\alpha| \geq -\alpha$, άρα $-|\alpha| \leq \alpha \leq |\alpha|$
- $|\alpha|^2 = \alpha^2$ και γενικότερα $|\alpha|^{2\kappa} = \alpha^{2\kappa}$, $\kappa \in \mathbf{Z}$
 Ακόμη είναι: $|\alpha|^{2\kappa+1} = \begin{cases} \alpha^{2\kappa+1}, & \text{αν } \alpha \geq 0 \\ -\alpha^{2\kappa+1}, & \text{αν } \alpha < 0 \end{cases}$, $\kappa \in \mathbf{Z}$
- $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$ και γενικότερα $|\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \dots \cdot \alpha_n| = |\alpha_1| \cdot |\alpha_2| \cdot \dots \cdot |\alpha_n|$
 Για $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = \alpha$, προκύπτει $|\alpha^n| = |\alpha|^n$
- $\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}$, $\beta \neq 0$
- $||\alpha| - |\beta|| \leq |\alpha \pm \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$ (τριγωνική ανισότητα)
 $|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta| \Leftrightarrow \alpha \cdot \beta \geq 0$ και $|\alpha + \beta| = ||\alpha| - |\beta|| \Leftrightarrow \alpha \cdot \beta \leq 0$
 Η ανισότητα $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$ ισχύει γενικότερα για n αριθμούς, δηλαδή:
 $|\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n| \leq |\alpha_1| + |\alpha_2| + \dots + |\alpha_n|$



Εξισώσεις – Ανισώσεις:

- Ⓜ $|x| = |\alpha| \Leftrightarrow x = \alpha \text{ ή } x = -\alpha$
- Ⓜ Αν $\theta > 0$, τότε: $|x| = \theta \Leftrightarrow x = \theta \text{ ή } x = -\theta$
- Ⓜ Αν $\theta > 0$, τότε: $|x| < \theta \Leftrightarrow -\theta < x < \theta$ και $|x| \leq \theta \Leftrightarrow -\theta \leq x \leq \theta$
- Ⓜ Αν $\theta > 0$, τότε: $|x| > \theta \Leftrightarrow x < -\theta \text{ ή } x > \theta$ και $|x| \geq \theta \Leftrightarrow x \leq -\theta \text{ ή } x \geq \theta$

Απόσταση δύο αριθμών:

Η απόσταση δύο αριθμών α και β συμβολίζεται με $d(\alpha, \beta)$ ή $d(\beta, \alpha)$ και είναι ίση με $|\alpha - \beta| = |\beta - \alpha|$, δηλαδή:

$$d(\alpha, \beta) = |\alpha - \beta|$$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

A. Παραστάσεις με απόλυτα

1. Να γραφεί χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής η παράσταση:

$$A = |x - 4| + 2x$$

Λύση:

Όταν η παράσταση περιέχει μία απόλυτη τιμή, τότε για να απαλλαγούμε από το σύμβολό της, εργαζόμαστε με βάση τον ορισμό

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $x - 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 4$, τότε: $|x - 4| = x - 4$. Άρα:

$$A = |x - 4| + 2x = x - 4 + 2x = 3x - 4$$

- Αν $x - 4 < 0 \Leftrightarrow x < 4$, τότε: $|x - 4| = -(x - 4) = -x + 4$. Άρα:

$$A = |x - 4| + 2x = -x + 4 + 2x = x + 4$$

Επομένως είναι:

$$A = \begin{cases} 3x - 4, & x \geq 4 \\ x + 4, & x < 4 \end{cases}$$

Παρατήρηση: Μερικές φορές δε χρειάζεται να διακρίνουμε περιπτώσεις.

Π.χ.: $|x^2 + 3| = x^2 + 3$, αφού $x^2 + 3 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$|-x^2| = -(-x^2) = x^2, \text{ αφού } -x^2 \leq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

2. Να γραφεί χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής η παράσταση:

$$A = |x-2| - 4|3x-1| + x$$

Λύση:

Όταν η παράσταση περιέχει δύο ή περισσότερες απόλυτες τιμές, εργαζόμαστε ως εξής:

- Βρίσκουμε τις τιμές του x που μηδενίζουν τις παραστάσεις που είναι μέσα στα απόλυτα
- Κάνουμε πίνακα στον οποίο να φαίνονται τα πρόσημα των παραστάσεων που είναι μέσα στα απόλυτα, για τις διάφορες τιμές του x
- Διακρίνουμε περιπτώσεις, για τις διάφορες τιμές του x

Είναι:

$$\blacktriangleright x-2=0 \Leftrightarrow x=2$$

$$\blacktriangleright 3x-1=0 \Leftrightarrow 3x=1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$$

x	$-\infty$	$1/3$	2	$+\infty$
$x-2$	-	-	○	+
$3x-1$	-	○	+	+

Στο διπλανό πίνακα φαίνονται τα πρόσημα των $x-2$ και $3x-1$, για τις διάφορες τιμές του x .

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $x < \frac{1}{3}$, τότε: $|x-2| = -(x-2) = -x+2$ και $|3x-1| = -(3x-1) = -3x+1$

Άρα:

$$A = |x-2| - 4|3x-1| + x = -x+2 - 4(-3x+1) + x = -x+2 + 12x - 4 + x = 12x - 2$$

- Αν $\frac{1}{3} \leq x < 2$, τότε: $|x-2| = -(x-2) = -x+2$ και $|3x-1| = 3x-1$

Άρα:

$$A = |x-2| - 4|3x-1| + x = -x+2 - 4(3x-1) + x = -x+2 - 12x + 4 + x = -12x + 6$$

- Αν $x \geq 2$, τότε: $|x-2| = x-2$ και $|3x-1| = 3x-1$

Άρα:

$$A = |x-2| - 4|3x-1| + x = x-2 - 4(3x-1) + x = x-2 - 12x + 4 + x = -10x + 2$$

$$\text{Επομένως είναι: } A = \begin{cases} 12x-2, & x < \frac{1}{3} \\ -12x+6, & \frac{1}{3} \leq x < 2 \\ -10x+2, & x \geq 2 \end{cases}$$

3. Αν ισχύει $a < 1 < b$, να γραφεί χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής η παράσταση:
 $A = |1 - a| + |1 - b| - |a - b|$

Λύση:

Αν υπάρχουν περιορισμοί για τις μεταβλητές που είναι μέσα στα απόλυτα, τότε λαμβάνουμε υπόψη τους περιορισμούς αυτούς και βρίσκουμε τα πρόσημα των παραστάσεων που είναι μέσα στα απόλυτα

Είναι:

- $a < 1 \Leftrightarrow 0 < 1 - a$, άρα $|1 - a| = 1 - a$
- $1 < b \Leftrightarrow 1 - b < 0$, άρα $|1 - b| = -(1 - b) = b - 1$
- $a < b \Leftrightarrow a - b < 0$, άρα $|a - b| = -(a - b) = b - a$

Έχουμε λοιπόν:

$$\begin{aligned} A &= |1 - a| + |1 - b| - |a - b| = \\ &= (1 - a) + (b - 1) - (b - a) = \\ &= 1 - a + b - 1 - b + a = 0 \end{aligned}$$

B. Εξισώσεις με απόλυτα

1. Να λυθεί η εξίσωση:

$$|2x + 5| = |-x + 3|$$

Λύση:

Για τη λύση της εξίσωσης $|x| = |\alpha|$, έχουμε:

$$|x| = |\alpha| \Leftrightarrow x = \alpha \quad \text{ή} \quad x = -\alpha$$

Είναι:

$$\begin{aligned} |2x + 5| &= |-x + 3| \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2x + 5 &= -x + 3 \quad \text{ή} \quad 2x + 5 = -(-x + 3) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 3x &= -2 \quad \text{ή} \quad 2x + 5 = x - 3 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x &= -\frac{2}{3} \quad \text{ή} \quad x = -8 \end{aligned}$$

2. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i. $3|2x+7|-9=0$

ii. $5|3x-4|=0$

iii. $5+2|4x-1|=3$

Λύση:

Για τη λύση της εξίσωσης $|x| = \theta$, έχουμε:

- Αν $\theta > 0$, τότε: $|x| = \theta \Leftrightarrow x = \theta$ ή $x = -\theta$

- Αν $\theta = 0$, τότε: $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

- Αν $\theta < 0$, τότε η εξίσωση είναι αδύνατη

i. Είναι:

$$\begin{aligned} 3|2x+7|-9=0 &\Leftrightarrow 3|2x+7|=9 \Leftrightarrow |2x+7|=3 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2x+7=3 \text{ ή } 2x+7=-3 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2x=-4 \text{ ή } 2x=-10 \Leftrightarrow x=-2 \text{ ή } x=-5 \end{aligned}$$

ii. Είναι:

$$5|3x-4|=0 \Leftrightarrow |3x-4|=0 \Leftrightarrow 3x-4=0 \Leftrightarrow 3x=4 \Leftrightarrow x=\frac{4}{3}$$

iii. Είναι:

$$5+2|4x-1|=3 \Leftrightarrow 2|4x-1|=-2 \Leftrightarrow |4x-1|=-1, \text{ που είναι αδύνατη}$$

3. Να λυθεί η εξίσωση:

$$\frac{6|2x-3|-4}{7} + |3-2x| = \frac{3|2x-3|+1}{2}$$

Λύση:

Σε εξίσωση που εμφανίζονται απόλυτα της ίδιας μόνο παράστασης, θέτουμε το απόλυτο ίσο με ω

Είναι $|3-2x|=|2x-3|$, οπότε:

$$\frac{6|2x-3|-4}{7} + |3-2x| = \frac{3|2x-3|+1}{2} \Leftrightarrow \frac{6|2x-3|-4}{7} + |2x-3| = \frac{3|2x-3|+1}{2} \quad (1)$$

Θέτουμε $|2x-3| = \omega \geq 0$. Τότε η (1) γράφεται:

$$\frac{6\omega-4}{7} + \omega = \frac{3\omega+1}{2} \Leftrightarrow 2(6\omega-4) + 14\omega = 7(3\omega+1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 12\omega - 8 + 14\omega = 21\omega + 7 \Leftrightarrow 5\omega = 15 \Leftrightarrow \omega = 3$$

Επομένως είναι:

$$|2x-3|=3 \Leftrightarrow 2x-3=3 \quad \text{ή} \quad 2x-3=-3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x=6 \quad \text{ή} \quad 2x=0 \Leftrightarrow x=3 \quad \text{ή} \quad x=0$$

4. Να λυθεί η εξίσωση:

$$|x+2| = -2(x-3)$$

Λύση:

Όταν η εξίσωση περιέχει μια απόλυτη τιμή, τότε δουλεύουμε με έναν από τους παρακάτω τρόπους:

α' τρόπος

Βγάζουμε το απόλυτο εργαζόμενοι με βάση τον ορισμό

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $x+2 \geq 0 \Leftrightarrow \boxed{x \geq -2}$, τότε:

$$|x+2| = -2(x-3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x+2 = -2x+6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$$

Η τιμή αυτή είναι δεκτή, διότι ικανοποιεί την υπόθεση $x \geq -2$

- Αν $x+2 < 0 \Leftrightarrow \boxed{x < -2}$, τότε:

$$|x+2| = -2(x-3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -x-2 = -2x+6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 8$$

Η τιμή αυτή απορρίπτεται, διότι δεν ικανοποιεί την υπόθεση $x < -2$

β' τρόπος

Διακρίνουμε περιπτώσεις για την παράσταση που δεν είναι μέσα στο απόλυτο

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $-2(x-3) \geq 0 \Leftrightarrow -2x+6 \geq 0 \Leftrightarrow -2x \geq -6 \Leftrightarrow \boxed{x \leq 3}$, τότε:

$$\begin{aligned}
 |x+2| &= -2(x-3) \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow x+2 &= -2(x-3) \text{ ή } x+2 = -[-2(x-3)] \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow x+2 &= -2x+6 \text{ ή } x+2 = -(-2x+6) \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow 3x &= 4 \text{ ή } x+2 = 2x-6 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow x &= \frac{4}{3} \text{ ή } x=8
 \end{aligned}$$

Η τιμή $x = \frac{4}{3}$ είναι δεκτή, διότι ικανοποιεί την υπόθεση $x \leq 3$,

ενώ η τιμή $x = 8$ απορρίπτεται, διότι δεν ικανοποιεί την υπόθεση $x \leq 3$

- Αν $-2(x-3) < 0 \Leftrightarrow -2x+6 < 0 \Leftrightarrow -2x < -6 \Leftrightarrow \boxed{x > 3}$, τότε η εξίσωση είναι αδύνατη

Γ. Ανισώσεις με απόλυτα

1. Να λυθούν οι ανισώσεις:

i. $\frac{2|x|-1}{4} < \frac{2+|x|}{3}$

ii. $2\left|\frac{x}{2}-3\right| < 0$

iii. $\frac{|x|-4}{3} < -2$

Λύση:

Για τη λύση της ανίσωσης $|x| < \theta$, έχουμε:

- Αν $\theta > 0$, τότε: $|x| < \theta \Leftrightarrow -\theta < x < \theta$

- Αν $\theta = 0$, τότε η ανίσωση είναι αδύνατη

- Αν $\theta < 0$, τότε η ανίσωση είναι αδύνατη

i. Είναι:

$$\begin{aligned}
 \frac{2|x|-1}{4} < \frac{2+|x|}{3} &\Leftrightarrow 3(2|x|-1) < 4(2+|x|) \Leftrightarrow 6|x|-3 < 8+4|x| \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow 2|x| &< 11 \Leftrightarrow |x| < \frac{11}{2} \Leftrightarrow -\frac{11}{2} < x < \frac{11}{2}
 \end{aligned}$$

ii. Είναι:

$$2\left|\frac{x}{2}-3\right| < 0 \Leftrightarrow \left|\frac{x}{2}-3\right| < 0, \text{ που είναι αδύνατη}$$

iii. Είναι:

$$\frac{|x|-4}{3} < -2 \Leftrightarrow |x|-4 < -6 \Leftrightarrow |x| < -2, \text{ που είναι αδύνατη}$$

2. Να λυθούν οι ανισώσεις:

i. $3-|x| \geq \frac{3(|x|-1)}{2}$

ii. $|x+2| \leq 0$

iii. $\frac{|3x+5|+4}{3} \leq 1$

Λύση:

Για τη λύση της ανίσωσης $|x| \leq \theta$, έχουμε:

- Αν $\theta > 0$, τότε: $|x| \leq \theta \Leftrightarrow -\theta \leq x \leq \theta$

- Αν $\theta = 0$, τότε: $|x| \leq 0 \Leftrightarrow x = 0$

- Αν $\theta < 0$, τότε η ανίσωση είναι αδύνατη

i. Είναι:

$$\begin{aligned} 3-|x| \geq \frac{3(|x|-1)}{2} &\Leftrightarrow 6-2|x| \geq 3(|x|-1) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 6-2|x| \geq 3|x|-3 \Leftrightarrow 5|x| \leq 9 \Leftrightarrow |x| \leq \frac{9}{5} \Leftrightarrow -\frac{9}{5} \leq x \leq \frac{9}{5} \end{aligned}$$

ii. Είναι:

$$|x+2| \leq 0 \Leftrightarrow |x+2| = 0 \Leftrightarrow x+2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$$

iii. Είναι:

$$\frac{|3x+5|+4}{3} \leq 1 \Leftrightarrow |3x+5|+4 \leq 3 \Leftrightarrow |3x+5| \leq -1, \text{ που είναι αδύνατη}$$

3. Να λυθούν οι ανισώσεις:

i. $\frac{3|x|-6}{|x|+2} > 2$

ii. $\frac{|1-x|}{3} + \frac{6-|x-1|}{2} < 2 + \frac{|x-1|+2}{2}$

iii. $|3x-1| - \left| \frac{1}{3} - x \right| > -1$

Λύση:

Για τη λύση της ανίσωσης $|x| > \theta$, έχουμε:

- Αν $\theta > 0$, τότε: $|x| > \theta \Leftrightarrow x < -\theta$ ή $x > \theta$

- Αν $\theta = 0$, τότε: $|x| > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$

- Αν $\theta < 0$, τότε η εξίσωση αληθεύει για κάθε $x \in \mathfrak{R}$

i. Είναι:

$$\begin{aligned} \frac{3|x|-6}{|x|+2} > 2 &\stackrel{|x|+2>0}{\Leftrightarrow} (|x|+2) \frac{3|x|-6}{|x|+2} > (|x|+2)2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 3|x|-6 > 2|x|+4 \Leftrightarrow |x| > 10 \Leftrightarrow x < -10 \text{ ή } x > 10 \end{aligned}$$

ii. Είναι $|1-x| = |x-1|$. Οπότε:

$$\begin{aligned} \frac{|1-x|}{3} + \frac{6-|x-1|}{2} < 2 + \frac{|x-1|+2}{2} &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{|x-1|}{3} + \frac{6-|x-1|}{2} < 2 + \frac{|x-1|+2}{2} &(1) \end{aligned}$$

Θέτουμε $|x-1| = \omega \geq 0$. Τότε η (1) γράφεται:

$$\begin{aligned} \frac{\omega}{3} + \frac{6-\omega}{2} < 2 + \frac{\omega+2}{2} &\Leftrightarrow 2\omega + 3(6-\omega) < 12 + 3(\omega+2) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2\omega + 18 - 3\omega < 12 + 3\omega + 6 &\Leftrightarrow 4\omega > 0 \Leftrightarrow \omega > 0 \end{aligned}$$

Επομένως είναι:

$$|x-1| > 0 \Leftrightarrow x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$$

iii. Είναι:

$$\begin{aligned} |3x-1| - \left| \frac{1}{3} - x \right| > -1 &\Leftrightarrow |3x-1| - \left| \frac{1-3x}{3} \right| > -1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow |3x-1| - \frac{|1-3x|}{|3|} > -1 \Leftrightarrow |3x-1| - \frac{|1-3x|}{3} > -1 \end{aligned}$$

Όμως $|1-3x| = |3x-1|$, οπότε έχουμε:

$$|3x-1| - \frac{|3x-1|}{3} > -1 \quad (1)$$

Θέτουμε $|3x-1| = \omega \geq 0$. Τότε η (1) γράφεται:

$$\omega - \frac{\omega}{3} > -1 \Leftrightarrow 3\omega - \omega > -3 \Leftrightarrow 2\omega > -3 \Leftrightarrow \omega > -\frac{3}{2}$$

Επομένως είναι:

$$|3x-1| > -\frac{3}{2}, \text{ που αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό } x$$

4. Να λυθούν οι ανισώσεις:

i. $|x| + \frac{2(1+|x|)}{3} \geq 5 + \frac{|x|+3}{2}$

ii. $\frac{|2x+7|-12}{4} \geq -3$

iii. $\frac{3-|x|}{2} \leq 2$

Λύση:

Για τη λύση της ανίσωσης $|x| \geq \theta$, έχουμε:

Αν $\theta > 0$, τότε: $|x| \geq \theta \Leftrightarrow x \leq -\theta \text{ ή } x \geq \theta$

Αν $\theta = 0$, τότε η εξίσωση αληθεύει για κάθε $x \in \mathfrak{R}$

Αν $\theta < 0$, τότε η εξίσωση αληθεύει για κάθε $x \in \mathfrak{R}$

i. Είναι:

$$\begin{aligned} |x| + \frac{2(1+|x|)}{3} \geq 5 + \frac{|x|+3}{2} &\Leftrightarrow 6|x| + 4(1+|x|) \geq 30 + 3(|x|+3) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 6|x| + 4 + 4|x| \geq 30 + 3|x| + 9 \Leftrightarrow 7|x| \geq 35 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow |x| \geq 5 \Leftrightarrow x \leq -5 \text{ ή } x \geq 5 \end{aligned}$$



ii. Είναι:

$\frac{|2x+7|-12}{4} \geq -3 \Leftrightarrow |2x+7|-12 \geq -12 \Leftrightarrow |2x+7| \geq 0$, που αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό x

iii. Είναι:

$\frac{3-|x|}{2} \leq 2 \Leftrightarrow 3-|x| \leq 4 \Leftrightarrow |x| \geq -1$, που αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό x

Δ. Αποδεικτικές ασκήσεις με απόλυτα

1. Να αποδειχθεί ότι ισχύει η ισότητα:

$$|x+y|^2 + |x-y|^2 = 2|x|^2 + 2|y|^2$$

Λύση:

Εκτελούμε τις πράξεις στο 1^ο μέλος της ισότητας και καταλήγουμε στο 2^ο μέλος

Έχουμε:

$$\begin{aligned} & |x+y|^2 + |x-y|^2 = \\ & = (x+y)^2 + (x-y)^2 = \\ & = x^2 + 2xy + y^2 + x^2 - 2xy + y^2 = \\ & = 2x^2 + 2y^2 = \\ & = 2|x|^2 + 2|y|^2 \end{aligned}$$

2. Να αποδειχθεί η ισοδυναμία:

$$|2x+y| < |x+2y| \Leftrightarrow |x| < |y|, \text{ με } (x+2y)y \neq 0$$

Λύση:

Υψώνουμε στο τετράγωνο για να απαλλαγούμε από τα απόλυτα και εκτελούμε τις πράξεις

Είναι:

$$\begin{aligned} |2x+y| < |x+2y| &\Leftrightarrow |2x+y|^2 < |x+2y|^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (2x+y)^2 < (x+2y)^2 \Leftrightarrow 4x^2 + 4xy + y^2 < x^2 + 4xy + 4y^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 3x^2 < 3y^2 \Leftrightarrow x^2 < y^2 \Leftrightarrow |x|^2 < |y|^2 \Leftrightarrow |x| < |y| \end{aligned}$$

3. Αν $|x| \leq 3$ και $|y| \leq 2$, τότε να αποδειχθεί ότι:

$$|4x - 3y + 1| \leq 19$$

Λύση:

Χρησιμοποιούμε την τριγωνική ανισότητα $|a \pm b| \leq |a| + |b|$

Είναι:

$$\begin{aligned} |4x - 3y + 1| &\leq |4x| + |3y| + |1| = 4|x| + 3|y| + 1 = \\ &= 4|x| + 3|y| + 1 \leq 4 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 1 = 19 \end{aligned}$$

Επομένως $|4x - 3y + 1| \leq 19$

Ε. Συμπληρωματικές ασκήσεις

1. i. Ποιο συμπέρασμα προκύπτει για τους πραγματικούς αριθμούς α και β , όταν:

$$|\alpha| + |\beta| = 0;$$

ii. Να λυθούν οι εξισώσεις:

a. $|x^2 - 9| + |9 - 3x| = 0$

b. $|x - 2| + |x - 3| = 0$

Λύση:

Ισχύει:

$$|\alpha| + |\beta| = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0$$

$$|\alpha| + |\beta| \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0 \text{ ή } \beta \neq 0$$

$$|\alpha| + |\beta| > 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0 \text{ ή } \beta \neq 0$$

i. Είναι:

$|\alpha| \geq 0$ και $|\beta| \geq 0$, οπότε $|\alpha| + |\beta| \geq 0$. Όμως η σχέση $|\alpha| + |\beta| = 0$ ισχύει μόνο όταν είναι $|\alpha| = 0$ και $|\beta| = 0$, δηλαδή όταν $\alpha = 0$ και $\beta = 0$.

Άρα $|\alpha| + |\beta| = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0$.

ii. Από το ερώτημα (i) έχουμε ότι $|\alpha| + |\beta| = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0$. Άρα:

$$\text{a. } |x^2 - 9| + |9 - 3x| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 9 = 0 \\ \text{και} \\ 9 - 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)(x+3) = 0 \\ \text{και} \\ -3x = -9 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \text{ ή } x = -3 \\ \text{και} \\ x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3$$

$$\text{b. } |x - 2| + |x - 3| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 0 \\ \text{και} \\ x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ \text{και} \\ x = 3 \end{cases}, \text{ που είναι αδύνατο}$$

2. Να λυθεί η ανίσωση:

$$|2x - 1| < |2x + 3|$$

Λύση:

Είναι:

$$\begin{aligned} |2x - 1| < |2x + 3| &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow |2x - 1|^2 < |2x + 3|^2 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (2x - 1)^2 < (2x + 3)^2 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 < 4x^2 + 12x + 9 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -16x < 8 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2} & \end{aligned}$$

3. Να λυθεί η ανίσωση:

$$3 < |2x - 5| < 4$$

Λύση:

Είναι:

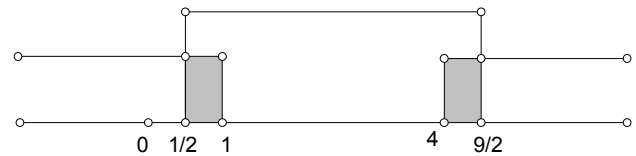
$$3 < |2x - 5| < 4 \Leftrightarrow \begin{cases} |2x - 5| > 3 & (1) \\ \text{και} \\ |2x - 5| < 4 & (2) \end{cases}$$

Από την (1) έχουμε:

$$\begin{aligned} |2x - 5| > 3 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2x - 5 < -3 &\text{ ή } 2x - 5 > 3 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2x < 2 &\text{ ή } 2x > 8 \Leftrightarrow x < 1 \text{ ή } x > 4 \quad (\alpha) \end{aligned}$$

και από τη (2):

$$\begin{aligned} |2x - 5| < 4 &\Leftrightarrow -4 < 2x - 5 < 4 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 1 < 2x < 9 &\Leftrightarrow \frac{1}{2} < x < \frac{9}{2} \quad (\beta) \end{aligned}$$



Οι (α) και (β) συναληθεύουν όταν: $\frac{1}{2} < x < 1$ ή $4 < x < \frac{9}{2}$

4. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i. $x^2 - 8|x| + 16 = 0$

ii. $|x^5| - 3x^4 = 0$

Λύση:

i. Είναι:

$$\begin{aligned} x^2 - 8|x| + 16 = 0 &\Leftrightarrow |x|^2 - 8|x| + 16 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (|x| - 4)^2 = 0 &\Leftrightarrow |x| - 4 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow |x| = 4 &\Leftrightarrow x = 4 \text{ ή } x = -4 \end{aligned}$$

ii. Είναι:

$$\begin{aligned} |x^5| - 3x^4 = 0 &\Leftrightarrow |x|^5 - 3|x|^4 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow |x|^4 (|x| - 3) = 0 \Leftrightarrow |x|^4 = 0 \quad \text{ή} \quad |x| - 3 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow |x| = 0 \quad \text{ή} \quad |x| = 3 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ή} \quad x = 3 \quad \text{ή} \quad x = -3 \end{aligned}$$

5. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i. $||x-2|+2|=3$

ii. $||x-1|-2|=1$

Λύση:

i. Είναι $|x-2|+2 > 0$, οπότε $||x-2|+2| = |x-2|+2$.

Άρα:

$$\begin{aligned} ||x-2|+2| = 3 &\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow |x-2|+2 = 3 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow |x-2| = 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x-2 = 1 \quad \text{ή} \quad x-2 = -1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = 3 \quad \text{ή} \quad x = 1 \end{aligned}$$

ii. Είναι:

$$\begin{aligned} ||x-1|-2| = 1 &\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow |x-1|-2 = 1 \quad \text{ή} \quad |x-1|-2 = -1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow |x-1| = 3 \quad \text{ή} \quad |x-1| = 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x-1 = 3 \quad \text{ή} \quad x-1 = -3 \quad \text{ή} \quad x-1 = 1 \quad \text{ή} \quad x-1 = -1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = 4 \quad \text{ή} \quad x = -2 \quad \text{ή} \quad x = 2 \quad \text{ή} \quad x = 0 \end{aligned}$$

6. Να λυθεί η ανίσωση:

$$d(3, x) + 2d(x, 1) < 2x + 7$$

Λύση:

Είναι:

$$d(3, x) + 2d(x, 1) < 2x + 7 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |3 - x| + 2|x - 1| < 2x + 7 \quad (1)$$

Όμως:

➤ $3 - x = 0 \Leftrightarrow x = 3$

➤ $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Στο διπλανό πίνακα φαίνονται τα πρόσημα των $3 - x$ και $x - 1$, για τις διάφορες τιμές του x .

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$3 - x$	+	+	○	-
$x - 1$	-	○	+	+

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $x < 1$, τότε: $|3 - x| = 3 - x$ και $|x - 1| = -(x - 1) = -x + 1$

Άρα:

$$(1) \Leftrightarrow |3 - x| + 2|x - 1| < 2x + 7 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3 - x + 2(-x + 1) < 2x + 7 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3 - x - 2x + 2 < 2x + 7 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -5x < 2 \Leftrightarrow x > -\frac{2}{5}$$

και επειδή $x < 1$, έχουμε: $-\frac{2}{5} < x < 1$

- Αν $1 \leq x < 3$, τότε: $|3 - x| = 3 - x$ και $|x - 1| = x - 1$

Άρα:

$$(1) \Leftrightarrow |3 - x| + 2|x - 1| < 2x + 7 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3 - x + 2(x - 1) < 2x + 7 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3 - x + 2x - 2 < 2x + 7 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -x < 6 \Leftrightarrow x > -6$$

και επειδή $1 \leq x < 3$, έχουμε: $1 \leq x < 3$

- Αν $x \geq 3$, τότε: $|3 - x| = -(3 - x) = x - 3$ και $|x - 1| = x - 1$

Άρα:

$$(1) \Leftrightarrow |3 - x| + 2|x - 1| < 2x + 7 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x - 3 + 2(x - 1) < 2x + 7 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x - 3 + 2x - 2 < 2x + 7 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x < 12$$

και επειδή $x \geq 3$, έχουμε: $3 \leq x < 12$

Επομένως, η αρχική ανίσωση αληθεύει όταν $-\frac{2}{5} < x < 12$

7. Να λυθεί η ανίσωση:

$$||x-2|-3| < 1$$

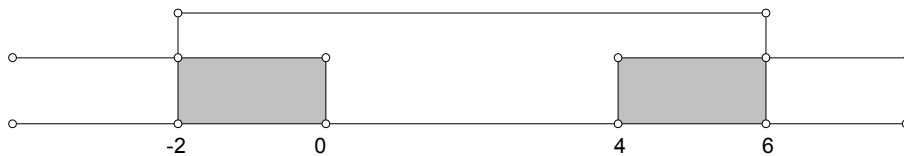
Λύση:

Είναι:

$$||x-2|-3| < 1 \Leftrightarrow -1 < |x-2|-3 < 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 < |x-2| < 4 \Leftrightarrow \begin{cases} |x-2| < 4 \\ \text{και} \\ |x-2| > 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4 < x-2 < 4 \\ \text{και} \\ x-2 < -2 \text{ ή } x-2 > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x < 6 \\ \text{και} \\ x < 0 \text{ ή } x > 4 \end{cases}$$



Επομένως, η αρχική ανίσωση αληθεύει όταν $-2 < x < 0$ ή $4 < x < 6$

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣ
ΚΩΣΤΑΚΗΣ ΛΑΜΠΡΟΣ
 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ