Επαναληπτική άσκηση στα Μαθηματικά κατεύθυνσης της Β΄ Λυκείου

Δίνεται η παραβολή $C: y^2 = 12x$. Να βρείτε:

i. την εστία Ε και τη διευθετούσα δ της παραβολής και

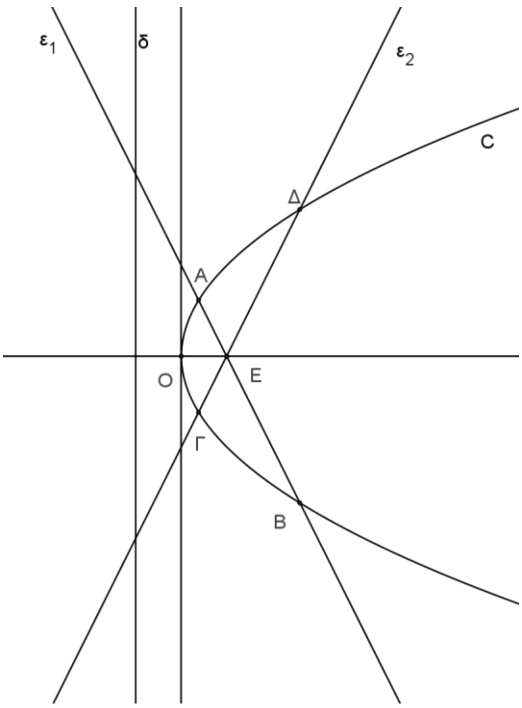
ii. ευθεία (ε) που διέρχεται από την εστία της παραβολής και τέμνει την παραβολή σε δύο σημεία Α και Β, έτσι ώστε $(AB) = 15$.

<u>Λύση:</u>

i. Έχουμε $2p = 12 \Leftrightarrow p = 6$, οπότε:

$E\left(\frac{6}{2}, 0\right)$ ή $E(3,0)$ και

$\delta: x = -\frac{6}{2} \Leftrightarrow x = -3$



ii. Από το σημείο Ε διέρχονται άπειρες ευθείες: μία είναι κατακόρυφη και για τις υπόλοιπες ορίζεται συντελεστή διεύθυνσης.

- Η ευθεία $x = 3$ δεν αποτελεί λύση του προβλήματος, καθώς τέμνει την παραβολή στα σημεία $A(3,6)$ και $B(3,-6)$, με $(AB) = 12$.
- Μια ευθεία που διέρχεται από το σημείο Ε και έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda \in \mathbb{R}^*$ (αφού, προφανώς, ούτε η οριζόντια ευθεία αποτελεί λύση του προβλήματος), έχει εξίσωση $y - 0 = \lambda(x-3) \Leftrightarrow y = \lambda(x-3)$. Οι συντεταγμένες των σημείων Α και Β προκύπτουν από τη λύση του συστήματος:

$$\begin{cases} y^2 = 12x & (1) \\ y = \lambda(x-3) & (2) \end{cases}$$

Είναι $(1)\overset{(2)}{\Leftrightarrow} y^2=12x \Leftrightarrow \left[\lambda(x-3)\right]^2=12x \Leftrightarrow \lambda^2\left(x^2-6x+9\right)=12x$
$\Leftrightarrow \lambda^2x^2-6\left(\lambda^2+2\right)x+9\lambda^2=0$ και αν $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$, τότε (Vieta) ισχύει:

$$x_1+x_2=\frac{6\left(\lambda^2+2\right)}{\lambda^2} \text{ και } x_1x_2=\frac{9\lambda^2}{\lambda^2} \Leftrightarrow x_1x_2=9$$

Για να υπολογίσουμε το λ εργαζόμαστε με έναν τους παρακάτω δύο τρόπους:

1ος τρόπος:

$$(AB)=15 \Leftrightarrow (AB)^2=15^2 \Leftrightarrow (x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2=225$$

$$\overset{x_1\neq x_2}{\Leftrightarrow} \frac{(x_2-x_1)^2}{(x_2-x_1)^2}+\frac{(y_2-y_1)^2}{(x_2-x_1)^2}=\frac{225}{(x_2-x_1)^2} \Leftrightarrow 1+\left(\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right)^2=\frac{225}{x^2{}_2-2x_2x_1+x^2{}_1}$$

$$\overset{\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\lambda}{\Leftrightarrow} 1+\lambda^2=\frac{225}{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2} \Leftrightarrow 1+\lambda^2=\frac{225}{\left[\frac{6\left(\lambda^2+2\right)}{\lambda^2}\right]^2-4\cdot 9}$$

$$\Leftrightarrow 1+\lambda^2=\frac{225}{\frac{36\left(\lambda^2+2\right)^2}{\lambda^4}-36} \Leftrightarrow 1+\lambda^2=\frac{225\lambda^4}{36\left(\lambda^2+2\right)^2-36\lambda^4}$$

$$\Leftrightarrow 1+\lambda^2=\frac{225\lambda^4}{36\left(\lambda^4+4\lambda^2+4\right)-36\lambda^4} \Leftrightarrow 1+\lambda^2=\frac{225\lambda^4}{36\lambda^4+144\lambda^2+144-36\lambda^4}$$

$$\Leftrightarrow 1+\lambda^2=\frac{225\lambda^4}{144\lambda^2+144} \Leftrightarrow 1+\lambda^2=\frac{225\lambda^4}{144\left(\lambda^2+1\right)} \Leftrightarrow 144\left(\lambda^2+1\right)^2=225\lambda^4$$

$$\Leftrightarrow 144\left(\lambda^4+2\lambda^2+1\right)=225\lambda^4 \Leftrightarrow 144\lambda^4+288\lambda^2+144=225\lambda^4$$

$$\Leftrightarrow 81\lambda^4-288\lambda^2-144=0 \Leftrightarrow 9\left(\lambda^2\right)^2-32\lambda^2-16=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda^2=4 \\ \text{ή} \\ \lambda^2=-\frac{4}{9}, \text{ αδύνατη} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (\lambda=-2 \text{ ή } \lambda=2)$$

<u>$2^{ος}$ τρόπος (με χρήση του ορισμού της παραβολής):</u>

$$\left(AB\right)=15 \Leftrightarrow \left(AE\right)+\left(BE\right)=15 \Leftrightarrow d\left(A,\delta\right)+d\left(B,\delta\right)=15$$

$$\overset{x_1,x_2>0}{\Leftrightarrow} \left(x_1+3\right)+\left(x_2+3\right)=15 \Leftrightarrow x_1+x_2=9 \Leftrightarrow \frac{6\left(\lambda^2+2\right)}{\lambda^2}=9$$

$$\Leftrightarrow 6\lambda^2+12=9\lambda^2 \Leftrightarrow \lambda^2=4 \Leftrightarrow \left(\lambda=-2 \text{ ή } \lambda=2\right)$$

Συνεπώς οι ζητούμενες ευθείες είναι οι:

$\left(\varepsilon_1\right): y=-2\left(x-3\right) \Leftrightarrow y=-2x+6$ και

$\left(\varepsilon_2\right): y=2\left(x-3\right) \Leftrightarrow y=2x-6$