Επαναληπτική άσκηση Άλγεβρας Α΄ Λυκείου

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\left(|-x|-\sqrt{x+1}\right)\left(|x|+\sqrt{x+1}\right)$.

- **i.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.
- **ii.** Να αποδείξετε ότι $f(x)=x^2-x-1$, για κάθε $x\in D_f$.
- **iii.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.
- **iv.** Να αποδείξετε ότι οι ρίζες της συνάρτησης f είναι ετερόσημες.
- **v.** Να λύσετε την εξίσωση $f(x^2)=1$, όπου $x\in D_f$.
- **vi.** Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τους άξονες x΄x και y΄y.
- **vii.** Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της συνάρτησης f, τότε:
  - **a)** να εξετάσετε αν υπάρχει ρίζα της συνάρτησης f, που να είναι πιθανότητα κάποιου ενδεχομένου,
  - **b)** να βρείτε το άθροισμα των ψηφίων του αριθμού $\kappa=2^{2014}(2+x_1)^{2014}(2+x_2)^{2014}$ και
  - **c)** να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\dfrac{1}{\sqrt[4028]{\kappa}+3}+\dfrac{1}{\sqrt[4028]{\kappa}-3}$, όπου κ ο αριθμός του **(b).**

__**Λύση:**__

i. Πρέπει $x+1\ge 0\Leftrightarrow x\ge -1$, οπότε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το:

$$D_f=[-1,+\infty)$$

ii. Για κάθε $x\in D_f=[-1,+\infty)$, έχουμε:

$$f(x)=\left(|-x|-\sqrt{x+1}\right)\left(|x|+\sqrt{x+1}\right)\overset{|-x|=|x|}{=}\left(|x|-\sqrt{x+1}\right)\left(|x|+\sqrt{x+1}\right)$$

$$=|x|^2-\left(\sqrt{x+1}\right)^2=x^2-(x+1)=x^2-x-1$$

iii. Αρκεί να αποδείξω ότι για τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου x^2-x-1, ισχύει $\Delta>0$. Πράγματι, είναι:

$$\Delta=(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-1)=1+4=5>0$$

iv. Αρκεί να αποδείξω για το γινόμενο P των ριζών της συνάρτησης f, ισχύει $P<0$. Πράγματι, είναι:

$$P=x_1x_2\overset{\text{Vieta}}{=}\frac{-1}{1}=-1<0$$

Τηλ./Fax: 210.62.19.712, Τηλ: 210.6218.894 www.apolito.gr – e-mail:info@apolito.gr
Λεωφόρος Μαραθώνος &Χρυσοστόμου Σμύρνης 3, **14565 ΑΓΙΟΣ ΣΤΕΦΑΝΟΣ**

v. Έχουμε:

$$f\left(x^2\right)=1 \Leftrightarrow \left(x^2\right)^2-x^2-1=1 \Leftrightarrow \left(x^2\right)^2-x^2-1-1=0 \Leftrightarrow \left(x^2\right)^2-x^2-2=0 \quad (1)$$

Θέτουμε $x^2=\omega \geq 0$, οπότε:

$$(1) \Leftrightarrow \omega^2-\omega-2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \omega=-1, \text{ απορρίπτεται} \left(-1<0\right) \\ \text{ ή} \\ \omega=2, \text{ δεκτή } (2 \geq 0) \end{cases}$$

Επομένως $x^2=2 \Leftrightarrow \left(x=-\sqrt{2} \text{ ή } x=\sqrt{2}\right)$. Όμως $x \in D_f$, δηλαδή $x \geq -1$ και συνεπώς από τις δύο λύσεις δεκτή είναι μόνο η $x=\sqrt{2}$.

vi. - Για να βρούμε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τον άξονα x΄x, λύνουμε την εξίσωση $f(x)=0$. Έχουμε, λοιπόν:

$$f(x)=0 \overset{(ii)}{\Leftrightarrow} x^2-x-1=0 \Leftrightarrow \left(x=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ ή } x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

Είναι $\frac{1+\sqrt{5}}{2}>0 \geq -1$ και $\frac{1-\sqrt{5}}{2} \geq -1 \Leftrightarrow 1-\sqrt{5} \geq -2 \Leftrightarrow 1+2 \geq \sqrt{5} \Leftrightarrow 3 \geq \sqrt{5}$, που ισχύει. Συνεπώς και οι δύο λύσεις της εξίσωσης είναι δεκτές, άρα η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τον άξονα x΄x στα σημεία $A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 0\right)$ και $B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 0\right)$.

- Για να βρούμε το σημείο στο οποίο η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τον άξονα y΄y, θέτουμε στην εξίσωση $y=f(x)$, όπου x το 0 (αφού $0 \in D_f$). Έχουμε, λοιπόν:

$$y=f(0) \overset{(ii)}{=} 0^2-0-1=-1$$

Άρα η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο $\Gamma(0,-1)$.

vii. Είναι $x_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ και $x_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ (από vi).

a) Θα εξετάσουμε αν $x_1, x_2 \in [0,1]$ ή όχι.

Είναι $x_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}>1$ και $x_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}<0$ $\left(\text{αφού} \sqrt{5}>1\right)$, άρα καμία από τις ρίζες της συνάρτησης f, δεν είναι πιθανότητα κάποιου ενδεχομένου.

b) Έχουμε:

$$\kappa = 2^{2014}\left(2+x_1\right)^{2014}\left(2+x_2\right)^{2014} = 2^{2014}\left(2+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2014}\left(2+\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2014}$$

$$= 2^{2014}\left(2+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^{2014}\left(2+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^{2014} = 2^{2014}\left(\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^{2014}\left(\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^{2014}$$

$$= 2^{2014}\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)^{2014}\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)^{2014} = 2^{2014}\frac{\left(5+\sqrt{5}\right)^{2014}}{2^{2014}}\frac{\left(5-\sqrt{5}\right)^{2014}}{2^{2014}}$$

$$= \left[\frac{\left(5+\sqrt{5}\right)\left(5-\sqrt{5}\right)}{2}\right]^{2014} = \left[\frac{5^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}{2}\right]^{2014} = \left(\frac{25-5}{2}\right)^{2014} = \left(\frac{20}{2}\right)^{2014}$$

$$= 10^{2014}$$

Άρα το άθροισμα των ψηφίων του αριθμού κ είναι ίσο με 1.

c) Έχουμε:

$$\frac{1}{\sqrt[4028]{\kappa}+3}+\frac{1}{\sqrt[4028]{\kappa}-3} = \frac{1}{\sqrt[4028]{10^{2014}}+3}+\frac{1}{\sqrt[4028]{10^{2014}}-3}$$

$$= \frac{1}{\sqrt[2\cdot 2014]{10^{1\cdot 2014}}+3}+\frac{1}{\sqrt[2\cdot 2014]{10^{1\cdot 2014}}-3} = \frac{1}{\sqrt{10}+3}+\frac{1}{\sqrt{10}-3} =$$

$$= \frac{1\left(\sqrt{10}-3\right)}{\left(\sqrt{10}+3\right)\left(\sqrt{10}-3\right)}+\frac{1\left(\sqrt{10}+3\right)}{\left(\sqrt{10}-3\right)\left(\sqrt{10}+3\right)} = \frac{\sqrt{10}-3}{\left(\sqrt{10}\right)^2-3^2}+\frac{\sqrt{10}+3}{\left(\sqrt{10}\right)^2-3^2}$$

$$= \frac{\sqrt{10}-3}{\left(\sqrt{10}\right)^2-3^2}+\frac{\sqrt{10}+3}{\left(\sqrt{10}\right)^2-3^2} = \frac{\sqrt{10}-3}{10-9}+\frac{\sqrt{10}+3}{10-9} = \frac{\sqrt{10}-3}{1}+\frac{\sqrt{10}+3}{1}$$

$$= \sqrt{10}-3+\sqrt{10}+3 = 2\sqrt{10}$$