

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟ ΘΕΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

Σώμα μάζας $m=2\text{kg}$ εκτελεί ταυτόχρονα δυο απλές αρμονικές ταλαντώσεις, της ίδιας διεύθυνσης, γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας και με την ίδια σταθερά επαναφοράς $D=200\text{N/m}$. Οι εξισώσεις που περιγράφουν τις ταλαντώσεις είναι:

$$x_1=0,2\eta\mu\omega_1 t \text{ (S.I.)} \quad \text{και} \quad u_2=2\sigma\upsilon\nu(\omega_2 t+\varphi) \text{ (S.I.)}$$

Την χρονική στιγμή t_1 , οι φάσεις των ταλαντώσεων είναι $\varphi_1 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$ και

$$\varphi_2 = \frac{5\pi}{6} \text{ rad} .$$

- α)** Να υπολογίσετε την γωνιακή συχνότητα κάθε ταλάντωσης και την φάση φ .
β) Να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης για την δεύτερη ταλάντωση καθώς και για την σύνθετη ταλάντωση, σε συνάρτηση με τον χρόνο.
γ) Για την σύνθετη ταλάντωση υπολογίστε σε ποιες θέσεις η κινητική ενέργεια της ταλάντωσης είναι τριπλάσια της δυναμικής ενέργεια της ταλάντωσης.
δ) Να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής της ορμής για την χρονική στιγμή t_1 .
ε) Να υπολογίσετε το έργο των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα από την χρονική στιγμή t_1 μέχρι την χρονική στιγμή που διέρχεται από την θέση ισορροπίας.

ΛΥΣΗ

α) Ισχύει $D_1= D_2=D=200\text{N/m}$ άρα:

$$D_1 = m \cdot \omega_1^2 \Rightarrow \omega_1 = \sqrt{\frac{D_1}{m}} \Rightarrow \omega_1 = \sqrt{\frac{200\text{N / m}}{2\text{kg}}} \Rightarrow \omega_1 = 10\text{rad / s}$$

$$D_2 = m \cdot \omega_2^2 \Rightarrow \omega_2 = \sqrt{\frac{D_2}{m}} \Rightarrow \omega_2 = \sqrt{\frac{200\text{N / m}}{2\text{kg}}} \Rightarrow \omega_2 = 10\text{rad / s}$$

Δηλαδή το σώμα εκτελεί ταλαντώσεις ίδιων συχνοτήτων, οπότε θα είναι και

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega = 10\text{rad / s} .$$

Για την χρονική στιγμή t_1 η διαφορά φάσης των δύο ταλαντώσεων είναι:

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{2} \Rightarrow \Delta\varphi = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

Οι ταλαντώσεις θα έχουν σταθερή διαφορά φάσης μεταξύ τους ,άρα :

$$\varphi = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

β) Για την δεύτερη ταλάντωση, από την εξίσωση που δίνεται προκύπτει

$$u_{\max} = 2 \text{ m / s , άρα:}$$

$$u_{\max} = \omega_2 \cdot A_2 \Rightarrow A_2 = \frac{u_{\max}}{\omega_2} = \frac{2 \text{ m / s}}{10 \text{ rad / s}} \Rightarrow A_2 = 0,2 \text{ m}$$

Η εξίσωση της απομάκρυνσης γράφεται:

$$x_2 = A_2 \eta\mu(\omega_2 t + \varphi) \Rightarrow x_2 = 0,2 \eta\mu(10t + \frac{\pi}{3})$$

Για την σύνθετη ταλάντωση:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos\varphi} \Rightarrow A = \sqrt{0,2^2 + 0,2^2 + 2 \cdot 0,2 \cdot 0,2 \cdot \cos\frac{\pi}{3}} \Rightarrow A = 0,2 \cdot \sqrt{3} \text{ m}$$

και

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{A_2 \cdot \eta\mu\varphi}{A_1 + A_2 \cos\varphi} \Rightarrow \varepsilon\varphi\theta = \frac{0,2 \text{ m} \cdot \eta\mu\frac{\pi}{3}}{0,2 \text{ m} + 0,2 \text{ m} \cdot \cos\frac{\pi}{3}} \Rightarrow \varepsilon\varphi\theta = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \varepsilon\varphi\theta = \varepsilon\varphi\frac{\pi}{6} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$$

Η εξίσωση της απομάκρυνσης για την σύνθετη ταλάντωση γράφεται:

$$x = A \eta\mu(\omega t + \theta) \Rightarrow x = 0,2\sqrt{3} \eta\mu(10t + \frac{\pi}{6})$$

γ) Ισχύει $K=3U$, από την αρχή διατήρησης της ενέργειας της ταλάντωσης έχουμε:

$$E = K + U \Rightarrow E = 3U + U \Rightarrow E = 4U \Rightarrow \frac{1}{2}DA^2 = 4 \cdot \frac{1}{2}Dx^2 \Rightarrow x = \pm \frac{A}{2} = \pm \frac{0,2\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \pm 0,1\sqrt{3} \text{ m}$$

δ) Για να βρούμε την χρονική στιγμή t_1 :

$$\varphi_1 = \omega \cdot t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{\varphi_1}{\omega} \Rightarrow t_1 = \frac{\pi/2}{10} \Rightarrow t_1 = \frac{\pi}{20} \text{ s}$$

Την χρονική στιγμή t_1 το σώμα θα βρίσκεται στη θέση:

$$x = 0,2\sqrt{3} \eta\mu(10t_1 + \frac{\pi}{6}) \Rightarrow x = 0,2\sqrt{3} \eta\mu(10 \cdot \frac{\pi}{20} + \frac{\pi}{6}) \Rightarrow x = 0,2\sqrt{3} \eta\mu \frac{3\pi}{2} \Rightarrow$$

$$x = 0,2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = 0,3 \text{ m}$$

Από τη γενικευμένη μορφή του θεμελιώδους νόμου της μηχανικής ισχύει:

$$\frac{dp}{dt} = \Sigma F \Rightarrow \frac{dp}{dt} = -D \cdot x \Rightarrow \frac{dp}{dt} = -200 \text{ N / m} \cdot 0,3 \text{ m} \Rightarrow \frac{dp}{dt} = -60 \text{ kgm / s}^2$$

ε) Για τις συντηρητικές δυνάμεις ισχύει:

$$W_{\Sigma F} = -\Delta U \Rightarrow W_{\Sigma F} = -(U_{\text{τελ}} - U_{\text{αρχ}}) \Rightarrow W_{\Sigma F} = U_{\text{αρχ}} - U_{\text{τελ}}$$

Η αρχική θέση είναι για την χρονική στιγμή t_1 και η τελική θέση για την θέση ισορροπίας, άρα:

$$W_{\Sigma F} = \frac{1}{2} \cdot D \cdot x^2 - 0 \Rightarrow W_{\Sigma F} = \frac{1}{2} \cdot 200 \text{ N / m} \cdot (0,3 \text{ m})^2 \Rightarrow W_{\Sigma F} = 9 \text{ J}$$