απόλυτο
εκπαιδευτικός οργανισμός

Θέμα Α

A_1. β

A_2. γ

A_3. α

A_4. γ

A_5. α. Λ β. Σ γ. Λ δ. Σ ε. Σ

Θέμα Β

B_1. ii Ο παρατηρητής είναι ακίνητος και η πηγή απομακρύνεται οπότε:

$$f_1 = \frac{U_H}{U_H + U_s} f_s \Leftrightarrow f_1 = \frac{U_H}{U_H + \frac{U_H}{20}} f_s \Leftrightarrow$$

$$f_1 = \frac{U_H}{\frac{21 U_H}{20}} f_s \Leftrightarrow f_1 = \frac{20}{21} f_s$$

Η κρούση των $\Sigma_1 - \Sigma_2$ είναι πλαστική:

$$\vec{p}_{πριν} = \vec{p}_{μετα} \Leftrightarrow \cancel{m} \cdot U_s = 2\cancel{m} \cdot U_s' \Leftrightarrow U_s' = \frac{U_s}{2} \Leftrightarrow$$

$$U_s' = \frac{U_H}{40}$$

Μετά την κρούση η πηγή απομακρύνεται από τον ακίνητο παρατηρητή, οπότε:

$$f_2 = \frac{U_H}{U_H + U_s'} \cdot f_s \Leftrightarrow f_2 = \frac{U_H}{U_H + \frac{U_H}{40}} f_s \Leftrightarrow$$

$$f_2 = \frac{U_H}{\frac{41 U_H}{40}} f_s \Leftrightarrow f_2 = \frac{40}{41} f_s$$

Επομένως:

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{\frac{20}{21} \cancel{f_s}}{\frac{40}{41} \cancel{f_s}} \Leftrightarrow \frac{f_1}{f_2} = \frac{20 \cdot 41}{40 \cdot 21} \Leftrightarrow \frac{f_1}{f_2} = \frac{41}{42}$$

B2. iii

Η παροχή παραμένει σταθερή

$$\Pi_1 = \Pi_2 \Leftrightarrow A_1 \cdot U_1 = A_2 \cdot U_2 \Leftrightarrow$$

$$2\cancel{A_2} \cdot U_1 = \cancel{A_2} \cdot U_2 \Leftrightarrow \quad U_2 = 2U_1$$

Εφαρμόζουμε εξίσωση Bernoulli για τα σημεία (1) και (2) της ίδιας οριζόντιας ρευματικής γραμμής.

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho U_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho U_2^2 \Leftrightarrow$$

$$\cancel{p_{ατμ}} + \rho \cdot g h + \frac{1}{2}\rho U_1^2 = \cancel{p_{ατμ}} + \frac{1}{2}\rho U_2^2 \Leftrightarrow$$

$$\cancel{\rho} g h + \frac{1}{2}\cancel{\rho} U_1^2 = \frac{1}{2}\cancel{\rho}\, 4U_1^2 \Leftrightarrow$$

$$g h = \frac{3U_1^2}{2} \Leftrightarrow \quad h = \frac{3U_1^2}{2g} \quad (1)$$

Εφαρμόζουμε εξίσωση Bernoulli για ένα σημείο της ελεύθερης επιφάνειας του νερού στο δοχείο και της οπής:

$$\cancel{p_{ατμ}} + \frac{1}{2}\rho \cancel{U_{επιφ}^2} \rightarrow 0 + \rho \cdot g H = \cancel{p_{ατμ}} + \frac{1}{2}\rho U_3^2 \Leftrightarrow$$

$$\rho g H = \frac{1}{2}\rho U_3^2 \Leftrightarrow \quad gH = \frac{U_3^2}{2} \Leftrightarrow \quad H = \frac{U_3^2}{2g} \quad (2)$$

$$\Pi_1 = \Pi_3 \Leftrightarrow A_1 \cdot U_1 = A_3 \cdot U_3 \Leftrightarrow$$

$$2A_2 \cdot U_1 = \frac{A_2}{2} \cdot U_3 \Leftrightarrow U_3 = 4U_1 \quad (3)$$

$$(2) \overset{(3)}{\Rightarrow} H = \frac{16U_1^2}{2g} \quad (4)$$

<u>Άρα</u> $$\frac{h}{H} = \frac{\frac{3U_1^2}{2g}}{\frac{16U_1^2}{2g}} \Leftrightarrow \frac{h}{H} = \frac{3}{16}$$

ii

B3. Εφαρμόζουμε ΘΜΚΕ (Α→Δ)

$$\frac{1}{2}I\omega^2 - 0 = W_F \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2}\frac{ML^2}{3}\omega^2 = F \cdot L \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$\omega^2 = 9\pi^2 \Leftrightarrow \omega = 3\pi \text{ rad/s}$$

Η κρούση της ράβδου με το σώμα μάζας m είναι πλαστική και εφαρμόζουμε ΑΔΣ

$$\vec{L}_{αρχ} = \vec{L}_{τελ} \Leftrightarrow I \cdot \omega = I_{ολ} \cdot \omega' \Leftrightarrow$$

$$\frac{ML^2}{3}\omega = \left(\frac{ML^2}{3} + mL^2\right)\omega' \Leftrightarrow$$

$$\omega' = \frac{\omega}{2} \Leftrightarrow \omega' = \frac{3\pi}{2} \text{ rad/s}$$

$$\omega' = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \Leftrightarrow \Delta t = \frac{\Delta\theta}{\omega'} \Leftrightarrow \Delta t = \frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{3\pi}{2}} \Leftrightarrow$$

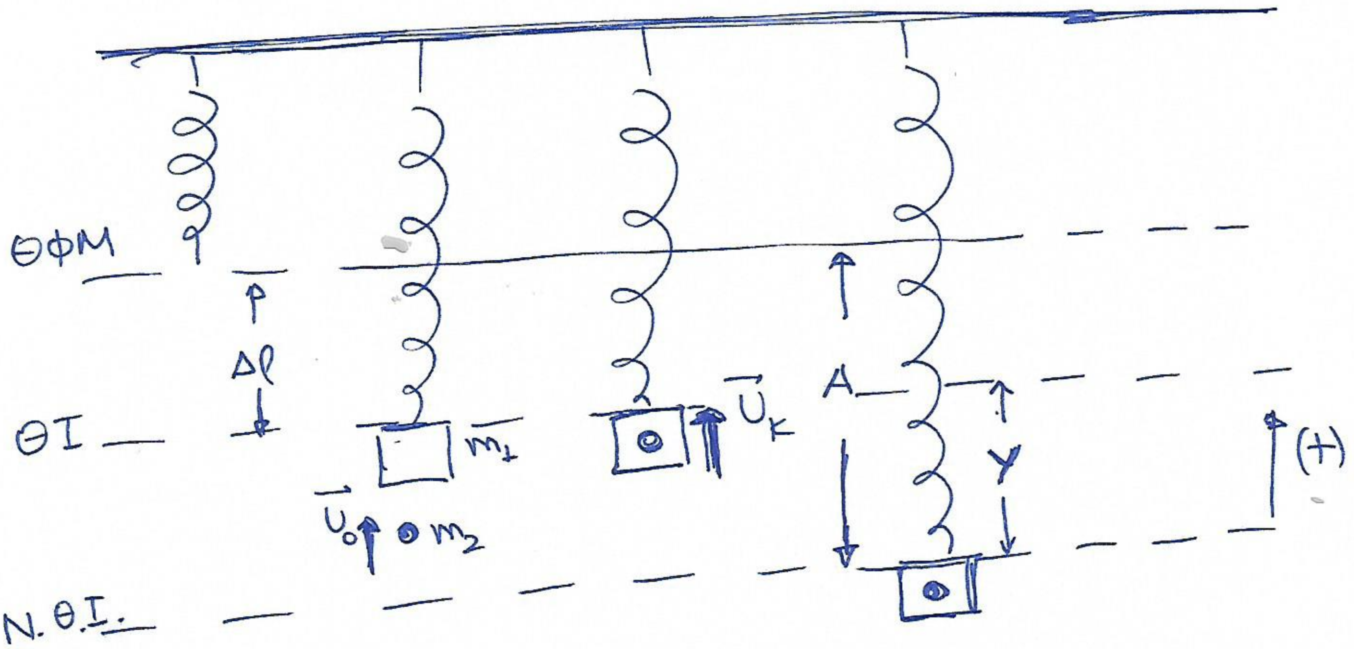
$$\Delta t = \frac{1}{3} s$$

Θέμα Γ

Γ_1. Θέση Ισορροπίας m_1:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{0} \Leftrightarrow F_{\epsilon\lambda} = W_1 \Leftrightarrow K \cdot \Delta\ell = m_1 \cdot g \Leftrightarrow$$

$$K = \frac{m_1 \cdot g}{\Delta\ell} \Leftrightarrow K = 200 N/m$$



Για τη θέση ισορροπίας του συσσωματώματος ισχύει:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{0} \Leftrightarrow F'_{\epsilon\lambda} = (m_1 + m_2) \cdot g \Leftrightarrow$$

$$K \cdot \Delta\ell' = (m_1 + m_2) \cdot g \Leftrightarrow K \cdot A = (m_1 + m_2) g \Leftrightarrow$$

$$A = \frac{(m_1 + m_2) g}{K} \Leftrightarrow A = \frac{20}{200} \Leftrightarrow \boxed{A = 0,1 \, m}$$

Γ2. Για την πλαστική κρούση εφαρμόζουμε

ΑΔΟ: $\vec{p}_{πριν} = \vec{p}_{μετά}$

$$m_1 \cdot u_0 = (m_1 + m_2) u_K \Leftrightarrow u_0 = \frac{(m_1+m_2)u_K}{m_1} \quad (1)$$

Για την ταλάντωση του συσσωματώματος εφαρμόζουμε ΑΔΕΤ:

$$E_T = K + U \Leftrightarrow \cancel{\frac{1}{2}} k A^2 = \cancel{\frac{1}{2}}(m_1+m_2)u_K^2 + \cancel{\frac{1}{2}} k y^2$$

$$200 \cdot 0{,}01 = 2u_K^2 + 200 \cdot 0{,}05^2$$

$$1 = u_K^2 + 100 \cdot 0{,}05^2$$

$$1 = u_K^2 + 0{,}25 \Leftrightarrow$$

$$u_K = \frac{\sqrt{3}}{2}\ m/s$$

όπου $y = A - \Delta\ell \Leftrightarrow$

$y = 0{,}05\ m$

οπότε $(1) \Rightarrow u_0 = \sqrt{3}\ m/s$

$$K_2 = \frac{1}{2} m_2 u_0^2 \Leftrightarrow K_2 = 1{,}5 J$$

Γ3. $|\Delta\vec{p}_2| = |\vec{p}_2{}' - \vec{p}_2| = |m_2 \cdot u_K - m_2 \cdot u_0| \Leftrightarrow$

$$|\Delta\vec{p}_2| = m_2 |u_K - u_0| = \left|\frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}\right| = \frac{\sqrt{3}}{2}\ kg\ m/s$$

$\Delta\vec{p}_2 < 0$ οπότε έχει φορά προς τα κάτω.

Γ4. Για $t = 0$ είναι $y = +0{,}05m$ οπότε:

$$y = A\ ημ(ωt + φ_0) \Leftrightarrow$$

$$0{,}05 = 0{,}1\ ημφ_0 \Leftrightarrow ημφ_0 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow ημφ_0 = ημ\frac{π}{6}$$

$$\varphi_0 = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \quad \acute{\eta} \quad \varphi_0 = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6}$$

Για $\kappa = 0$: $\varphi_0 = \frac{\pi}{6}$ ή $\varphi_0 = \frac{5\pi}{6}$ (απορρίπτεται)

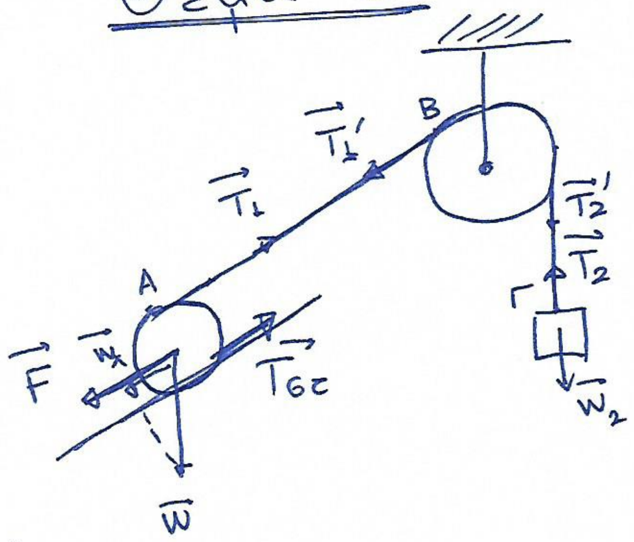
Επειδή $\upsilon_K > 0$ είναι $\varphi_0 = \frac{\pi}{6}$ rad

Άρα $y = 0{,}1\, \eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{6}\right)$ (S.I.)

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m_1 + m_2}} \Leftrightarrow \omega = \sqrt{\frac{200}{2}} \Leftrightarrow \omega = 10 \text{ rad/s}$$

Τηλ.: 210-6219712 / 210-6218894 www.apolito.gr - e-mail:info@apolito.gr
Λεωφόρος Μαραθώνος & Χρυσοστόμου Σμύρνης 3, 14565 Άγιος Στέφανος

Θέμα Δ



Δ1. Το σύστημα ισορροπεί

Σ: $\Sigma\vec{F}=\vec{0} \Leftrightarrow T_2 = w_2 \Leftrightarrow T_2 = 20N$

νήμα αβαρές και μη εκτατό: $T_1' = T_1$ και $T_2' = T_2$

τροχαλία: $\Sigma\vec{\tau}_{(o)} = \vec{0} \Leftrightarrow T_2'\cdot R - T_1'\cdot R = 0 \Leftrightarrow T_1' = T_2' = 20N$

κύλινδρος: $\Sigma\vec{\tau}_{(o)}=\vec{0} \Leftrightarrow T_1 \cdot R - T_{στ}\cdot R = 0 \Leftrightarrow T_1 = T_{στ} = 20N$

$\Sigma \vec{F}_x = \vec{0} \Leftrightarrow F + w_x = T_1 + T_{στ} \Leftrightarrow F = T_1+T_{στ} - Mg\,ημφ \Leftrightarrow$

$\boxed{F=30N}$

Δ2. $υ_A = υ_B = υ_Γ$ γιατί το νήμα δεν ολισθαίνει ως προς τον κύλινδρο.

$$\frac{dυ_A}{dt} = \frac{dυ_B}{dt}=\frac{dυ_Γ}{dt} \Leftrightarrow \frac{d2υ_{cm}}{dt} = \frac{d(ω_{τροχ}\cdot R_T)}{dt} = \frac{dυ_Γ}{dt} \Leftrightarrow$$

$2a_{cm} = a_{γτ}\cdot R_T = a$ (1)

Για Σ: $\Sigma\vec F = M_Σ \cdot \vec a \Leftrightarrow M_Σ \cdot g - T_2 = M_Σ \cdot a$ (2)

Για τροχαλία: $\Sigma\vec\tau_{(o)} = I_{cm}\cdot \vec{a_{γτ}} \Leftrightarrow T_2'\cdot \cancel{R_T} - T_1'\cdot\cancel{R_T} = \frac{1}{2} M_T R_T^{\cancel{2}} a_{γτ}$

$T_2 - T_1 = \frac{1}{2} M_T \cdot a$ (3)

Για τον κύλινδρο: $\Sigma\vec{\tau}_{(K)} = I_{cm}\cdot a_\gamma \Leftrightarrow T_1\cdot \cancel{R_K} - T_{\sigma\tau}\cancel{R_K} = \frac{1}{2}M_K R_K^{\cancel{2}} a_\gamma$

$T_1 - T_{\sigma\tau} = \frac{1}{2} M_K a_{cm}$ (4)

$\Sigma F_x = M_K \cdot a_{cm} \Leftrightarrow T_1 + T_{\sigma\tau} - W_x = M_K \cdot a_{cm}$ (5)

(4) + (5) $\Rightarrow$ $2T_1 - W_x = \frac{3}{2} M_K \cdot a_{cm}$ (6)

(2) + (3) $\Rightarrow$ $M_\Sigma \cdot g - T_1 = \left(M_\Sigma + \frac{M_T}{2}\right)\cdot a$

$2M_\Sigma g - 2T_1 = 2\left(M_\Sigma + \frac{M_T}{2}\right)\cdot a$ (7)

(6) + (7) $\Rightarrow$ $2M_\Sigma \cdot g - M_K \cdot g \cdot \eta\mu\varphi = \frac{3}{2} M_K \cdot \frac{a}{2} + 2\left(M_\Sigma + \frac{M_T}{2}\right)\cdot a \Leftrightarrow$

$2\cdot 2\cdot 10 - 2\cdot 10\cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}\cdot 2\cdot \frac{a}{2} + 2\cdot\left(2 + \frac{2}{2}\right)\cdot a \Leftrightarrow$

$40 - 10 = \frac{3}{2}a + 6a \Leftrightarrow 30 = \frac{15}{2}a \Leftrightarrow \boxed{a = 4\,m/s^2}$

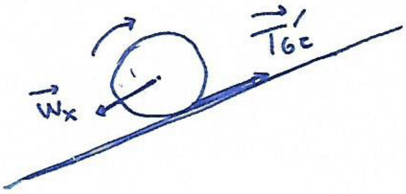
και $\boxed{a_{cm} = 2\,m/s^2}$

Δ3. $0 \to t_1$:

$\upsilon_{cm_1} = a_{cm}\cdot t_1 = 2\cdot 0,5 = 1\,m/s$

$\Delta x_{cm_1} = \frac{1}{2} a_{cm} t_1^2 = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 0,5^2 = 0,25\,m$

όταν η F καταργείται ο κύλινδρος εκτελεί ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση μεταφορικά και στροφικά



$\Sigma\vec{F}_x = M\cdot\vec{a}_{cm}' \Leftrightarrow w_x - T_{\sigma\tau}' = M_K \cdot a_{cm}'$ ①

$\Sigma\tau_{(K)} = I_{cm}\cdot a_\gamma' \Leftrightarrow T_{\sigma\tau}' \cancel{R_K} = \frac{1}{2} M_K R_K^{\cancel{2}} a_{\gamma\omega\nu}' \Leftrightarrow$

$T_{\sigma\tau}' = \frac{M_K a_{cm}'}{2}$ ②

① + ② $\Rightarrow$ $\cancel{M_K} g\,\eta\mu\varphi = \frac{3}{2}\cancel{M_K} a_{cm}' \Leftrightarrow a_{cm}' = \frac{2g\,\eta\mu\varphi}{3} \Leftrightarrow$

$a_{cm}' = \frac{10}{3}\,m/s^2$

$\upsilon_{cm} = \upsilon_{cm_1} - a_{cm}'\Delta t \Leftrightarrow 0 = 1 - \frac{10}{3}\cdot\Delta t \Leftrightarrow$

$\frac{10}{3}(t_2 - t_1) = 1 \Leftrightarrow t_2 - t_1 = 0,3 \Leftrightarrow$

$t_2 = 0,3 + 0,5 \Leftrightarrow \boxed{t_2 = 0,8\,s}$

Δ4. $\Delta x_{cm} = \Delta x_{cm_1} + \Delta x_{cm_2}$

όπου $\Delta x_{cm_1} = 0,25m$

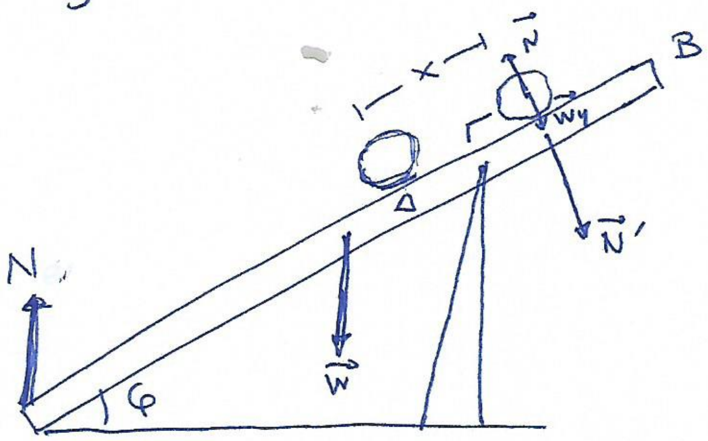
και $\Delta x_{cm_2} = v_{cm_1} \cdot \Delta t - \frac{1}{2} a_{cm} \Delta t^2 \Leftrightarrow$

$\Delta x_{cm_2} = 1 \cdot 0,3 - \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{3} \cdot 0,3^2 \Leftrightarrow$

$\Delta x_{cm_2} = 0,3 - \frac{10 \cdot 0,3 \cdot 0,3}{2 \cdot 3} = 0,3 - 0,15 = 0,15m$

άρα: $\Delta x_{cm} = 0,25m + 0,15m = 0,4m \Leftrightarrow \boxed{\Delta x_{cm} = 0,4m}$

Δ5.



Για τον κύλινδρο: $\Sigma \vec{F}_y = \vec{0} \Leftrightarrow N = w_y \Leftrightarrow N = M_κ \cdot g \cdot συνφ \Leftrightarrow$
$N = 20συνφ$

$N' = N = 20συνφ$

$\Sigma \vec{\tau}_{(Γ)} = \vec{0} \Leftrightarrow N \cdot (\ell - BΓ)συνφ + N' \cdot (x - ΓΔ) - M \cdot g\left(\frac{\ell}{2} - ΓB\right)συνφ$

$N \cdot (4 - 1,5) \cdot \cancel{συνφ} + 20\, \cancel{συνφ}\,(x - 0,2) = 20 \cdot (2 - 1,5)\, \cancel{συνφ}$

$N \cdot 2,5 + 20\,(x - 0,2) = 10 \Leftrightarrow$

$N \cdot 2,5 + 20x - 4 = 10 \Leftrightarrow$

$N \cdot 2,5 = 14 - 20 \cdot x \Leftrightarrow N = 5,6 - 8x$

Για $x = 0$: $N = 5,6N$

Για $x = 0,4m$: $N = 5,6 - 8 \cdot 0,4 = 5,6 - 3,2 = 2,4N > 0$ άρα δεν ανατρέπεται