ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2014
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΘΕΜΑΤΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη Θεωρήματος σελ.: 251

Α2. Ορισμός σελ.: 273

Α3. Ορισμός σελ.: 150

Α4. α) Λ, β) Σ, γ) Σ, δ) Σ, ε)Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1.

Έστω $z = x + yi$ με $x, y \in \mathbb{R}$

$$2\sqrt{x^2+y^2}^2 + (x + yi + x - yi)i - 4 - 2i = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2xi - 4 - 2i = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + xi - 2 - i = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + y^2 - 2) + (x - 1)i = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 2 = 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 1 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \quad \kappa\alpha\iota \quad y = 1 \\ \text{ή} \\ x = 1 \quad \kappa\alpha\iota \quad y = -1 \end{cases}$$

Άρα $z = 1 + i$ ή $z = 1 - i$

Β2.

$$w = 3\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{39} = 3\left[\frac{(1+i)^2}{1+1}\right]^{39} = 3\left(\frac{2i}{2}\right)^{39}$$

$$= 3 \cdot i^{39} = 3i^{4\cdot 9+3} = 3(i^4)^9 \cdot i^3 = -3i$$

Β3.

$$|u + (-3i)| = |4 + 4i - 1 + \cancel{i} - \cancel{i}|$$

$$|u - 3i| = |3 + 4i|$$

$$|u - 3i| = 5$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας του u είναι κύκλος με κέντρο $K(0,\ 3)$ και ακτίνα $\rho = 5$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

$$h'(x) = 1 - \frac{e^x}{e^x+1} = \frac{1}{e^x+1} > 0$$

Άρα h γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

$$h''(x) = \frac{-1}{(e^x+1)^2}e^x = \frac{-e^x}{(e^x+1)^2} < 0$$

Άρα h κοίλη στο $\mathbb{R}$

Γ2.

$$e^{h(2h'(x)} < \frac{e}{e+1}$$

$$\overset{lnx\uparrow}{\Leftrightarrow} h(2h'(x)) < ln\frac{e}{e+1}$$

$$\Leftrightarrow h\big(2h'(x)\big) < lne - \ln(e+1)$$

$$\Leftrightarrow h(2h'(x)) < 1 - ln(e+1)$$

$$\Leftrightarrow h(2h'(x)) < h(1)$$

$$\overset{h\uparrow}{\Leftrightarrow} 2h'(x) < 1$$

$$\overset{\Gamma 1}{\Leftrightarrow} 2\frac{1}{e^x+1} < 1 \;\Leftrightarrow\; e^x + 1 > 2 \;\Leftrightarrow\; e^x > 1$$

$$\Leftrightarrow e^x > e^0 \overset{e^x\uparrow}{\Leftrightarrow} x > 0$$

Γ3.

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty}[x - ln(e^x+1)]$$

$$= \lim_{x\to+\infty}[lne^x - ln(e^x+1)] = \lim_{x\to+\infty} ln\frac{e^x}{e^x+1} = \lim_{u\to 1} lnu = 0$$

αφού

$$\lim_{x\to+\infty} u = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x+1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x} = 1$$

Άρα η $y = 0$ οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{h(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{ln(e^x+1)}{x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left[1-\frac{1}{x}ln(e^x+1)\right]$$

$$=1-0\cdot ln1=1$$

και

$$\lim_{x\to-\infty}(h(x)-x)=\lim_{x\to-\infty}\left[-\frac{1}{x}\cdot ln(e^x+1)\right]=0$$

Άρα η $y=x$ πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$

Γ4.

$$\varphi(x)=e^x(h(x)+ln2)=e^x(h(x)-h(0))$$

$$\varphi(x)=0\Leftrightarrow e^x(h(x)-h(0))=0\Leftrightarrow h(x)=h(0)$$

$$\Leftrightarrow x=0$$

και για $x>0\overset{h\uparrow}{\Leftrightarrow} h(x)>h(0)$

$$\Leftrightarrow h(x)-h(0)>0\Leftrightarrow e^x\big(h(x)-h(0)\big)>0\Leftrightarrow\varphi(x)>0$$

$$E=\int_0^1|\varphi(x)|dx=\int_0^1\varphi(x)dx$$

$$=\int_0^1 e^x\cdot(h(x)+ln2)dx=\int_0^1 e^x\cdot(x-ln(e^x+1)+ln2)dx$$

$$=\int_0^1 e^x\cdot ln\frac{2e^x}{e^x+1}dx$$

$$=\left[e^x ln\frac{2e^x}{e^x+1}\right]_0^1-\int_0^1\frac{e^x}{e^x+1}dx$$

$$=eln\frac{2e}{e+1}-[ln(e^x+1)]_0^1$$

$$=eln\frac{2e}{e+1}-\ln(e+1)+ln2$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

Έχουμε

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}\underset{\text{D.L.H}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to0}\frac{e^x}{1}=1=f(0)$$

άρα η f συνεχής στο $x=0$.

$$f'(x)=\frac{e^x\cdot x-(e^x-1)}{x^2}=\frac{x\cdot e^x-e^x+1}{x^2}$$

Θεωρούμε $\varphi(x)=x\cdot e^x-e^x+1$

$\varphi'(x)=e^x+x\cdot e^x-e^x=x\cdot e^x$

$\varphi'(x)=0\Leftrightarrow x=0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	
$\varphi(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Ελάχιστο
$\varphi(0)=0$

Δηλ. $\varphi(x)\geq\varphi(0)=0$
Το ''ίσον'' ισχύει μόνο
για $x=0$.

Οπότε $f'(x)>0,\quad x\neq 0$ δηλ. η f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Δ2.

α)

Θεωρούμε:

$$F(x)=\int_1^{2f'(x)}f(u)du$$

Παρατηρούμε ότι:

$$F(0)=\int_1^{2f'(0)}f(u)du=0$$

Επειδή η f είναι κυρτή η f' είναι γνησίως αύξουσα οπότε $f'(0)=\frac{1}{2}$ μόνο για $x=0$.

Αφού

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^x-1}{x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=}\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}\ \overset{\frac{0}{0}}{=}\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2}\ =\ \frac{1}{2}$$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x - 1}{x} = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

Επειδή η f γνησίως αύξουσα έχουμε $f(x) > 0$ για $x \in \mathbb{R}$ οπότε το $x = 0$ είναι μοναδική ρίζα της $F(x) = 0$

β)

$$y'(t) = \frac{e^{x(t)} \cdot x'(t) \cdot x(t) - x'(t) \cdot \left(e^{x(t)} - 1\right)}{x^2(t)}$$

Πρέπει

$$x'(t) = 2 \cdot \frac{x'(t) \cdot \left[e^{x(t)} \cdot x(t) - e^{x(t)} + 1\right]}{x^2(t)}$$

$$\Leftrightarrow x^2(t) = 2e^{x(t)} \cdot x(t) - 2e^{x(t)} + 2$$

Θεωρούμε

$h(x) = 2e^x \cdot x - 2e^x + 2 - x^2$

Παρατηρούμε ότι $h(0) = 0$ και $h'(x) = 2e^x + 2e^x \cdot x - 2e^x - 2x$

$= 2x(e^x - 1) > 0, \quad x \in \mathbb{R}$ οπότε η $h \uparrow$ άρα η $x = 0$ μοναδική ρίζα.

Άρα $x(t_0) = 0$ και $y(t_0) = 1$ δηλ. το σημείο είναι $M(0,\ 1)$.

Δ3.

$g(x) = (e^x - e)^2(x - 2)^2$

$g'(x) = 2(e^x - e)e^x(x - 2)^2 + 2(x - 2)(e^x - e)^2$

$= 2(e^x - e)(x - 2)[(x - 2)e^x + e^x - e]$

$= 2(e^x - e)(x - 2)(xe^x - e^x - e)$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - e = 0$ ή $x - 2 = 0$ ή $xe^x - e^x - e = 0 \Leftrightarrow$

$x = 1$ ή $x = 2$ ή $x \cdot e^x - e^x - e = 0$

Θεωρούμε $\varphi(x) = x \cdot e^x - e^x - e$

$\varphi'(x) = x \cdot e^x > 0, \quad x > 0$ δηλ. φ γνησίως αύξουσα στο $(0,\ +\infty)$

Η φ συνεχής στο $[1,\ 2]$

$\varphi(1) = -e < 0$

$\varphi(2) = e^2 - e > 0$

Οπότε υπάρχει $x_0 \in (1,\ 2): \varphi(x_0) = 0$

Επειδή η $\varphi \uparrow$ το x_0 μοναδικό

x	0		1		x_0		2		$+\infty$
$e^x - e$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x - 2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x \cdot e^x - e^x - e$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	T.E	$\nearrow$	T.M	$\searrow$	T.E	$\nearrow$	

Άρα η g έχει δύο τοπικά ελάχιστα και ένα τοπικό μέγιστο