απόλυτο
εκπαιδευτικός οργανισμός

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2020

ΘΕΜΑ Α

$A_1 - A_2$ σχολικό

A_3 Λ $f(x) = x^3$ ↑ στο $\mathbb{R}$ και

$$f'(0) = 0$$

A_4 α) Λ

β) Σ

γ) Σ

δ) Σ

ε) Σ

Τηλ.: 210-6219712 / 210-6218894 www.apolito.gr - e-mail:info@apolito.gr
Λεωφόρος Μαραθώνος & Χρυσοστόμου Σμύρνης 3, 14565 Άγιος Στέφανος

ΘΕΜΑ Β

Β1) $D_{fog} = \{x / x \in \mathbb{R}$ και $e^x > 1\} = (0, +\infty)$

$(fog)(x) = f(e^x) = \dfrac{e^x + 2}{e^x - 1}$

Β2) $(fog)'(x) = \dfrac{e^x(e^x - 1) - e^x(e^x + 2)}{(e^x - 1)^2}$

$= \dfrac{-3e^x}{(e^x - 1)^2} < 0$ άρα $fog \downarrow \Rightarrow fog: 1-1$

$R_{fog} = \left(\lim\limits_{x \to +\infty} fog(x), \lim\limits_{x \to 0^+} fog(x)\right) = (1, +\infty)$

$= D_{(fog)^{-1}}$

$y = \dfrac{e^x + 2}{e^x - 1} \Leftrightarrow e^x + 2 = ye^x - y \Leftrightarrow$

$e^x(1 - y) = -2 - y \Leftrightarrow e^x = \dfrac{y + 2}{y - 1}$

$x = \ln \dfrac{y + 2}{y - 1}$

$$(f\circ g)^{-1}(x) = \ln\frac{x+2}{x-1}, \quad x \in (1,+\infty)$$

B3) $$\varphi'(x) = \frac{x-1}{x+2}\cdot\frac{x-1-(x+2)}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{-3}{(x+2)(x-1)^2} < 0 \quad \text{άρα } \varphi \downarrow \text{ στο } (1,+\infty)$$

B4) $$\lim_{x\to 1^+} \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right) = \lim_{y\to+\infty} \ln y = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \ln\frac{x+2}{x-1} = \lim_{y\to 1} \ln y = 0$$

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2020

ΘΕΜΑ Γ

Γ1) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-x} - \ln\lambda, & x \le 0 \\ \eta\mu x + \lambda\sigma\upsilon\nu x, & x \in \left(0, \dfrac{3\pi}{2}\right) \end{cases}$ $\lambda > 0$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = f(0) \Rightarrow 1 - \ln\lambda = \lambda$

$\Leftrightarrow \ln\lambda = \lambda - 1 \Leftrightarrow \lambda = 1$

Γ2) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{\eta\mu x}{x} + \dfrac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x}\right)$

$= 1 + 0 = 1$

$\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\frac{1}{1-x} - 1}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\frac{\cancel{x}}{1-x}}{\cancel{x}} = 1$

Άρα $f'(0) = 1$

$y - 1 = 1(x - 0) \Leftrightarrow y = x + 1$

$\varepsilon\varphi\,\omega = 1 \Rightarrow \omega = \dfrac{\pi}{4}$

Γ3) Για $x<0$ $\quad f'(x) = -\dfrac{(1-x)'}{(1-x)^2} =$

$= \dfrac{1}{(1-x)^2} > 0$

Για $x \in \left(0, \dfrac{3\pi}{2}\right)$ $\quad f'(x) = συνx - ημx$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow συνx = ημx \Leftrightarrow σφx = 1$

$x = κ\pi + \dfrac{\pi}{4}$

$0 < κ\pi + \dfrac{\pi}{4} < \dfrac{3\pi}{2}$

$-\pi/4 < κ\pi < \dfrac{5\pi}{4}$

$κ = 0$ ή $κ = 1$

$x = \dfrac{\pi}{4}$ ή $x = \pi + \dfrac{\pi}{4}$

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2020

Γ4) εφαπτομένη στο Μ

$$y - f(a) = f'(a)\cdot(x-a)$$

για $y=0$: $-f(a) = f'(a)\cdot x - a\cdot f'(a)$

$$f'(a)x = af'(a) - f(a)$$

$$\frac{1}{(1-a)^2}\cdot x = \frac{a}{(1-a)^2} - \frac{1}{1-a}$$

$$x = a - (1-a)$$

$$x = 2a - 1$$

$$x(t) = 2a(t) - 1$$

$$x'(t) = 2a'(t) \Rightarrow x'(t_0) = 2a'(t_0)$$

$$= 2\cdot\left(-\frac{a(t_0)}{3}\right) = -\frac{2}{3}(-1) = \frac{2}{3}$$

μμ/μχ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2020

ΘΕΜΑ Δ

Δ1 $f'(x) = e^x + 2x - e$.

Η f' συνεχής στο $[0,1]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

$f'(0) = 1 - e < 0$

$f'(1) = e + 2 - e = 2 > 0$.

οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0,1)$: $f'(x_0) = 0$

$f''(x) = e^x + 2 > 0$ δηλ. η f' είναι γνησίως αύξουσα οπότε το x_0 μοναδικό.

Για $x < x_0 \overset{f' \uparrow}{\Longleftrightarrow} f'(x) < f'(x_0) = 0$.

Για $x > x_0 \Longleftrightarrow f'(x) > f'(x_0) = 0$

Άρα η f παρουσιάζει ελάχιστο στο x_0.

$f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow e^{x_0} = e - 2x_0 \quad (1)$

$f(x_0) = e^{x_0} + x_0^2 - e x_0 - 1 \overset{(1)}{=} e - 2x_0 + x_0^2 - e x_0 - 1$

$= x_0^2 - (e+2)x_0 + e - 1$.

Δ2. Έχουμε ότι.

$$\frac{1}{f(x)-f(x_0)} + ημ\frac{1}{x-x_0} \geq \frac{1}{f(x)-f(x_0)} - 1.$$

Αφού $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$

και $f(x) \geq f(x_0) \Longleftrightarrow f(x) - f(x_0) \geq 0$

οπότε $\lim\limits_{x \to x_0} \left(\frac{1}{f(x)-f(x_0)} - 1 \right) = +\infty$

ΑΡΑ και $\lim\limits_{x \to x_0} \left(\frac{1}{f(x)-f(x_0)} + ημ\frac{1}{x-x_0} \right) = +\infty$

Η f συνεχής στο $[x_0, \rho]$

Η f παραγ. στο (x_0, ρ).

υπάρχει $\xi \in (x_0, \rho)$:

$$f'(\xi) = \frac{f(\rho) - f(x_0)}{\rho - x_0} = \frac{f(x_0) - f(\rho)}{x_0 - \rho}$$

Αφου $\xi < \rho < \kappa < 1$, για κάθε $x \in (\rho, 1)$

τότε $\overset{f'}{\Longleftrightarrow}$ $f'(\xi) < f'(\kappa)$, $x \in (\rho, 1)$

$$\Leftrightarrow \frac{f(\rho) - f(x_0)}{\rho - x_0} < f'(\kappa)$$

Δ3) Θα μπορούσαμε να πούμε

$$g'(x) = f'(x) + 1 > 1$$

Αφού για $x > x_0$ έχουμε $f'(x) > 0$

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2020

Δ3) Θεωρούμε $g(x) = f(x) + x - x_0$.

Η g συνεχής στο $[x_0, 1]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

$g(x_0) = f(x_0) < 0$.

Αφού $0 < x_0 \overset{f\downarrow}{\Longleftrightarrow} f(0) > f(x_0) \Longleftrightarrow 0 > f(x_0)$

$g(1) = f(1) + 1 - x_0 = 1 - x_0 > 0$ αφού $x_0 \in (0,1)$

οπότε υπάρχει $\rho \in (x_0, 1)$: $g(\rho) = 0$

Επειδή $x_0 < x \Leftrightarrow e^{x_0} < e^{x}$

$x_0 < x \Leftrightarrow 2x_0 < 2x$

$\oplus \; e^{x_0} + 2x_0 < e^{x} + 2x$

$\Leftrightarrow e^{x_0} + 2x_0 + 1 - e < e^{x} + 2x - e + 1$

$\overset{(1)}{\Longleftrightarrow} e - 2x_0 + 2x_0 + 1 - e < g'(x)$

$\Leftrightarrow 1 < g'(x)$ άρα η g γν. αύξουσα οπότε το ρ είναι μοναδική ρίζα της g στο $(x_0, 1)$.

Δ4) ΠΡΕΠΕΙ $f(x_0) > f(\rho) \cdot f'(\kappa) + f(\rho)$.

$\Leftrightarrow f(x_0) - f(\rho) > f(\rho) \cdot f'(\kappa)$.

$f(\rho) = x_0 - \rho < 0$.

$\Leftrightarrow \dfrac{f(x_0) - f(\rho)}{f(\rho)} < f'(\kappa)$.

$\Leftrightarrow \dfrac{f(x_0) - f(\rho)}{x_0 - \rho} < f'(\kappa)$ για κάθε $\kappa \in (\rho, 1)$.