ΘΕΜΑ Δ

Δ1) $h(x) = \ln x - \frac{1}{x}$, $x > 0$

$h'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0$ άρα $h \uparrow \Rightarrow h: 1-1$

$h(1) = -1$, $h(e) = 1 - \frac{1}{e}$

$h(1) \cdot h(e) < 0$

Λόγω Θ.Β θα υπάρχει $x_0 \in (1, e) : h(x_0) = 0$

x_0 : μοναδικό αφού $h: 1-1$

Δ2) $f(x) = (\ln x_0)(x+1) - \ln x - 1$ $\quad x > 0$

$f'(x) = \ln x_0 - \frac{1}{x} = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x} = \frac{x - x_0}{x_0 x}$

x	0		x_0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	ολ ε	$\nearrow$	

$f(x_0) = \ln x_0 (x_0 + 1) - \ln x_0 - 1$

$= \ln x_0 \cdot x_0 - 1 = \frac{1}{x_0} x_0 - 1 = 0$

Δ3) Για $x \le 0$ $\quad g(x) \le 0 \quad h(x) > 0$

Για $x > 0$: $x e^{-x} = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}$ $\Leftrightarrow$

$$\ln x + \ln e^{-x} = (x+1)\ln\left(\frac{x_0}{e}\right)$$

$$\ln x - x = (x+1)(\ln x_0 - 1)$$

$$K(x) = \ln x - x - (x+1)(\ln x_0 - 1)$$

$$K'(x) = \frac{1}{x} - 1 - \ln x_0 + 1 = \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} = \frac{x_0 - x}{x \cdot x_0}$$

x	0		x_0		$+\infty$
$K'(x)$		$+$	0	$-$	
$K(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$	

$$K(x_0) = \ln x_0 - x_0 - (x_0 + 1)(\ln x_0 - 1)$$

$$= \cancel{\ln x_0} - \cancel{x_0} - x_0 \ln x_0 + \cancel{x_0} - \cancel{\ln x_0} + 1$$

$$= -x_0 \cdot \frac{1}{x_0} + 1 = 0$$

Άρα $x = x_0$

$$g'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1-x)$$

$$h'(x) = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1} \cdot \ln\left(\frac{x_0}{e}\right)$$

$$g'(x_0) = h'(x_0) \Leftrightarrow e^{-x_0}(1-x_0) = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x_0+1} \cdot (\ln x_0 - 1)$$

$$e^{-x_0}(x_0-1) = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x_0+1} (1-\ln x_0)$$

$$e^{-x_0} \cdot \cancel{(x_0-1)} = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x_0+1} \cdot \frac{\cancel{x_0-1}}{x_0}$$

$$x_0 \cdot e^{-x_0} = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x_0+1}$$ ισχύει

Τηλ.: 210-6219712 / 210-6218894 www.apolito.gr - e-mail:info@apolito.gr
Λεωφόρος Μαραθώνος & Χρυσοστόμου Σμύρνης 3, 14565 Άγιος Στέφανος

Δ4) $d(x) = f(x) - \phi(x)$ $x > 0$

(I) Αν ϕ παραγωγίσιμη στο x_0

τότε λόγω ΘF $d'(x_0) = 0 \Rightarrow f'(x_0) = \phi'(x_0)$

$\phi'(x_0) = 0$

(II) Αν ϕ όχι παραγωγίσιμη στο x_0

Τότε x_0 κρίσιμο σημείο της ϕ

$$d(x) = \sqrt{(x-x)^2 + (f(x) - \phi(x))^2} = |f(x) - \phi(x)|$$

$$= f(x) - \phi(x)$$