ΘΕΜΑ Δ.

Δ1. $f'(x) = 2e^{x-\alpha} - 2x$

$f''(x) = 2e^{x-\alpha} - 2.$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2e^{x-\alpha} - 2 = 0 \Leftrightarrow e^{x-\alpha} = 1.$

$\Leftrightarrow x - \alpha = 0 \Leftrightarrow x = \alpha$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f''(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	$\frown$	Σ.Κ	$\smile$

Για $x > \alpha \Leftrightarrow x - \alpha > 0 \Leftrightarrow e^{x-\alpha} > 1$

Για $x < \alpha \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow e^{x-\alpha} < 1.$

άρα η C_f έχει μοναδικό σ.κ. το $(\alpha, f(\alpha)) = (\alpha, 2-\alpha^2)$

Δ2. Η $f'(x)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$\searrow$	ελάχιστο $f'(\alpha) = 2 - 2\alpha < 0$	$\nearrow$

Η f' συνεχής και $\downarrow$ στο $(-\infty, \alpha]$ οπότε

$A_1 = f'((-\infty, \alpha]) = [f'(\alpha), \lim_{x \to -\infty} f'(x)) = [2 - 2\alpha, +\infty).$

Επειδή $0 \in A_1$ υπάρχει $x_1 \in (-\infty, \alpha)$: $f'(x_1) = 0$

αφού η f' είναι $\downarrow$ τότε το x_1 μοναδικό.

Η f' συνεχής και $\uparrow$ στο $(\alpha, +\infty)$. οπότε

$A_2 = f'((\alpha, +\infty)) = (f'(\alpha), \lim_{x \to +\infty} f'(x)) = (2 - 2\alpha, +\infty).$

αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x-a}\cdot\left(2-\dfrac{x^2}{e^{x-a}}\right) = +\infty(2-0) = +\infty.$

και $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{e^{x-a}} \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x}{e^{x-a}} \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{e^{x-a}} = 0$

Επειδή $0 \in A_2$ υπάρχει $x_2 \in (\alpha, +\infty) : f'(x_2)=0$

αφού η f' είναι $\nearrow$ το x_2 είναι μοναδικό.

Για $x < x_1 < \alpha \overset{f' \searrow}{\iff} f'(x) > f'(x_1) = 0.$

Για $x_1 < x < \alpha \overset{f' \searrow}{\iff} f'(x_1) > f'(x) \iff 0 > f'(x)$

Για $\alpha < x < x_2 \overset{f' \nearrow}{\iff} f'(x) < f'(x_2) = 0$

Για $\alpha < x_2 < x \overset{f' \nearrow}{\iff} f'(x_2) < f'(x) \iff 0 < f'(x)$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	τ.Μ.	$\searrow$	τ.Ε.	$\nearrow$	

Δ3) Αφού η $f \searrow$ στο (α, x_2) τότε

$f(x) < f(\alpha)$, $x \in (\alpha, x_2)$.

Όμως $f(\alpha) < f(1) \iff 2-\alpha^2 < 2e^{1-\alpha}-1$

$\iff 0 < 2e^{1-\alpha} + \alpha^2 - 3.$

Θεωρούμε $g(x) = 2e^{1-x} + x^2 - 3$, $x>1$

Τηλ.: 210-6219712 / 210-6218894 www.apolito.gr - e-mail:info@apolito.gr
Λεωφόρος Μαραθώνος & Χρυσοστόμου Σμύρνης 3, 14565 Άγιος Στέφανος

$g'(x) = -2e^{1-x} + 2x$

$g''(x) = 2e^{1-x} + 2 > 0$ δηλ. η $g' \uparrow$

Για $x > 1 \overset{g'\uparrow}{\Longleftrightarrow} g'(x) > g'(1) = 0$.

άρα η $g \uparrow$ στο $(1, +\infty)$.

Για $x > 1 \overset{g\uparrow}{\Longleftrightarrow} g(x) > g(1) \Leftrightarrow$.

$g(x) > 0$.

Άρα η $g(x) > 0$ για κάθε $x > 1$

Οπότε $f(x) < f(1)$ στο (α, x_2).

Δ4 Για $\alpha = 2 \rightarrow f(x) = 2e^{x-2} - x^2$.

$f'(x) = 2e^{x-2} - 2x$

$f'(2) = 2 - 4 = -2$.

οπότε εφ: $y - f(2) = f'(2)\cdot(x-2)$.

$\Leftrightarrow y - (-2) = -2.(x-2) \Leftrightarrow y = -2x+2$

Επειδή η f κυρτή στο $[2, +\infty)$.

τότε $f(x) \geq y_{εφ} \Leftrightarrow f(x) \geq -2x + 2$.

= μόνο για $x=2$.

οπότε $\sqrt{x-2}\cdot f(x) > (-2x+2)\cdot\sqrt{x-2}$

άρα $\displaystyle\int_2^3 f(x)\cdot\sqrt{x-2}\,dx > \underbrace{\int_2^3 (-2x+2)\cdot\sqrt{x-2}\,dx}_{A}$.

θέτουμε $u = x-2$ τότε $du = dx$

$x = 2 \to u_1 = 0$

$x = 3 \to u_2 = 1$.

άρα $\displaystyle A = \int_0^1 (-2(u+2)+2)\cdot\sqrt{u}\,du.$

$\displaystyle = \int_0^1 (-2u-2)\cdot\sqrt{u}\,du = \int_0^1 \left(-2u^{\frac{3}{2}} - 2u^{\frac{1}{2}}\right)du.$

$\displaystyle = \left[-2\frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - 2\cdot\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = -\frac{4}{5} - \frac{4}{3} = -\frac{32}{15}.$

άρα $\displaystyle\int_2^3 f(x)\cdot\sqrt{x-2}\,dx > -\frac{32}{15}.$