ΘΕΜΑ Γ:

$f(x) = -\eta\mu x \, , \; x \in [0, \pi]$

$A\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$

Γ1. Ν.δ.ό $\exists$ ακριβώς δύο εφαπτόμενες $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ της C_f που άγονται από το Α και να τις βρω.

$f'(x) = (-\eta\mu x)' = -\sigma\upsilon\nu x \, , \; x \in [0, \pi]$

Αν $(x_0, f(x_0))$ σ.ε., τότε:

$(\varepsilon\varphi): \; y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y + \eta\mu x_0 = -\sigma\upsilon\nu x_0 (x - x_0)$

$A \in (\varepsilon\varphi) \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} + \eta\mu x_0 = -\sigma\upsilon\nu x_0 \left(\frac{\pi}{2} - x_0\right)$

$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} + \eta\mu x_0 + \frac{\pi}{2}\sigma\upsilon\nu x_0 - x_0 \sigma\upsilon\nu x_0 = 0$

Θεωρώ τη συνάρτηση $g(x) = -\frac{\pi}{2} + \eta\mu x + \frac{\pi}{2}\sigma\upsilon\nu x - x\sigma\upsilon\nu x \, , \; x \in [0, \pi]$

$g'(x) = \cancel{\sigma\upsilon\nu x} - \frac{\pi}{2}\eta\mu x - \cancel{\sigma\upsilon\nu x} + x\eta\mu x = \left(x - \frac{\pi}{2}\right)\eta\mu x \, , \; x \in (0, \pi)$

x	0		$\pi/2$		π
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	0	$\searrow$		$\nearrow$	0

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$

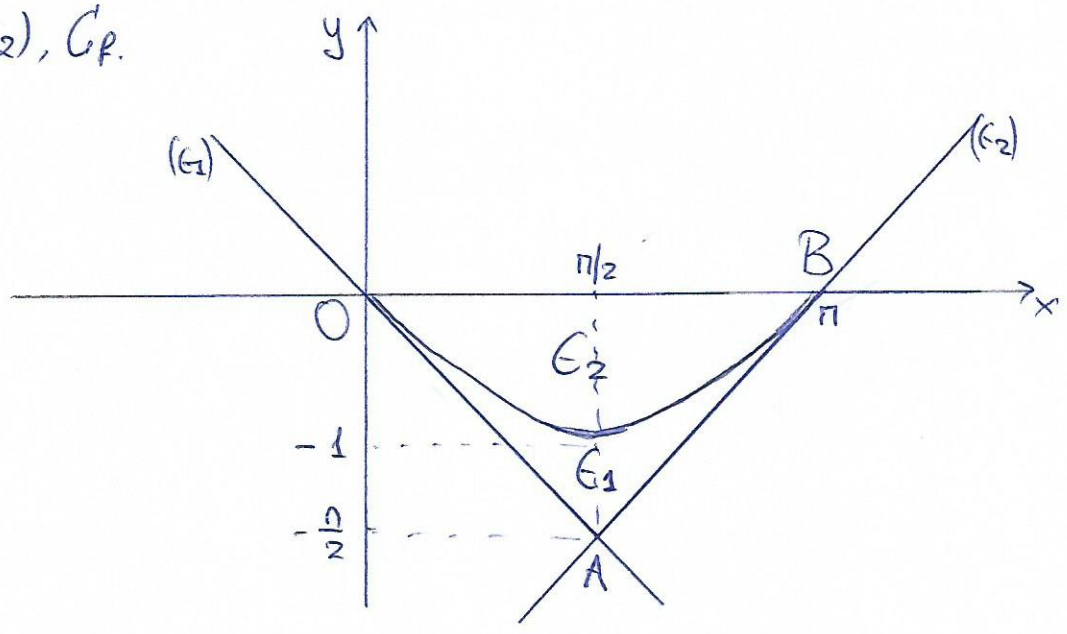
Προφανώς η g έχει ακριβώς δύο ρίζες, τις 0 και π, αφού $g(0)=g(\pi)=0$ και $g(x)<0$, $x\in(0,\pi)$ (όπως φαίνεται στον πίνακα μονοτονίας).

Συνεπώς υπάρχουν ακριβώς δύο εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της f που άγονται από το A, οι:

(ε_1): $y=-x$ (σ.ε. το $(0,0)$)

(ε_2): $y=x-\pi$ (σ.ε. το $(\pi,0)$).

<u>Γ2</u>. $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2), C_f$.



. Νδό $\dfrac{E_1}{E_2}=\dfrac{\pi^2}{8}-1$.

$$E_2=\int_0^{\pi}|f(x)|dx=\int_0^{\pi}|-\eta\mu x|dx=\int_0^{\pi}\eta\mu x\,dx=\int_0^{\pi}(-\sigma\upsilon\nu x)'dx$$

$$=\left[-\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\pi}=-\sigma\upsilon\nu\pi+\sigma\upsilon\nu 0=1+1=2 \text{ τ.μ.}$$

$$E_1 = (OAB) - E_2 = \frac{\pi \cdot \frac{\pi}{2}}{2} - 2 = \left(\frac{\pi^2}{4} - 2\right) \tau.\epsilon.$$

Άρα $\dfrac{E_1}{E_2} = \dfrac{\frac{\pi^2}{4} - 2}{2} = \dfrac{\pi^2}{8} - 1$

Γ3. $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{f(x)+\pi}{f(x)-x+\pi} = ;$

- $\lim\limits_{x \to \pi} (f(x)+\pi) = \pi$
- $\lim\limits_{x \to \pi} (f(x)-x+\pi) = 0$ και $f(x)-x+\pi \geq 0$, αφού

$f(x) \geq x - \pi$ $\quad ((\epsilon_2): y = x - \pi)$

Άρα $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{f(x)+\pi}{f(x)-x+\pi} \overset{\frac{\pi}{0^+}}{=} +\infty$

Γ4. Είναι $f(x) \geq x - \pi$ και το "=" ισχύει μόνο για $x = \pi$.

Άρα $f(x) > x - \pi$ $\forall x \in [1, e]$. Συνεπώς:

$$\frac{f(x)}{x} > 1 - \frac{\pi}{x} \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} - \left(1 - \frac{\pi}{x}\right) > 0$$

$$\Rightarrow \int_1^e \left[\frac{f(x)}{x} - \left(1 - \frac{\pi}{x}\right)\right] dx > 0$$

$$\Leftrightarrow \int_1^e \frac{f(x)}{x}\, dx - \int_1^e \left(1 - \frac{\pi}{x}\right) dx > 0$$

$$\Leftrightarrow \int_1^e \frac{f(x)}{x}\,dx > \int_1^e \left(1 - \frac{n}{x}\right) dx$$

$$\Leftrightarrow \int_1^e \frac{f(x)}{x}\,dx > \int_1^e (x - n\ln x)'\,dx$$

$$\Leftrightarrow \int_1^e \frac{f(x)}{x}\,dx > \left[x - n\ln x\right]_1^e$$

$$\Leftrightarrow \int_1^e \frac{f(x)}{x}\,dx > e - n\overbrace{\cancel{\ln e}}^{1} - 1 + n\overbrace{\cancel{\ln 1}}^{0}$$

$$\Leftrightarrow \int_1^e \frac{f(x)}{x}\,dx > e - n - 1$$