ΘΕΜΑ Β

$f(x) = \ln x \,, \; x > 0$

$g(x) = \dfrac{x}{1-x} \,, \; x \neq 1$

Β1. $f \circ g$;

- $D_{f\circ g} = \{ x \in D_g \setminus g(x) \in D_f \} = \{ x \neq 1 \setminus \dfrac{x}{1-x} > 0 \}$

$= \{ x \neq 1 \setminus x(1-x) > 0 \} = (0,1)$

- $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\dfrac{x}{1-x}\right) = \ln \dfrac{x}{1-x}$

Άρα $(f\circ g)(x) = \ln \dfrac{x}{1-x} \,, \; x \in (0,1)$

Β2. $h(x) = (f\circ g)(x) = \ln \dfrac{x}{1-x} \,, \; x \in (0,1)$

Νδό $\exists$ η h^{-1} και να βρω την h^{-1}.

- Αν $x_1, x_2 \in (0,1)$, με $h(x_1) = h(x_2)$, τότε:

$\ln \dfrac{x_1}{1-x_1} = \ln \dfrac{x_2}{1-x_2} \overset{\ln 1-1}{\Leftrightarrow} \dfrac{x_1}{1-x_1} = \dfrac{x_2}{1-x_2} \Leftrightarrow x_1(1-x_2) = (1-x_1)x_2$

$\Leftrightarrow x_1 - \cancel{x_1 x_2} = x_2 - \cancel{x_1 x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$

Τηλ.: 210-6219712 / 210-6218894 www.apolito.gr - e-mail:info@apolito.gr
Λεωφόρος Μαραθώνος & Χρυσοστόμου Σμύρνης 3, 14565 Άγιος Στέφανος

Άρα η h είναι 1-1 και επομένως η h αντιστρέφεται.

- $h(x)=y \Leftrightarrow \ln\frac{x}{1-x}=y \Leftrightarrow \ln\frac{x}{1-x}=\ln e^y$

$\overset{\ln\,1-1}{\Leftrightarrow} \frac{x}{1-x}=e^y \Leftrightarrow x=(1-x)e^y \Leftrightarrow x=e^y-xe^y$

$\Leftrightarrow x+xe^y=e^y \Leftrightarrow (1+e^y)x=e^y \Leftrightarrow x=\frac{e^y}{1+e^y}\ , x\in\mathbb{R}$

Άρα $h^{-1}(x)=\frac{e^x}{e^x+1}\ , x\in\mathbb{R}$ (αφού η $h(x)=y$ έχει μοναδική λύση ως προς x).

Β3 $\varphi(x)=h^{-1}(x)=\frac{e^x}{e^x+1}\ , x\in\mathbb{R}$

Μονοτονία, ακρότατα, κυρτότητα, σημεία καμπής φ.

- $\varphi'(x)=\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right)'=\frac{e^x(e^x+1)-e^xe^x}{(e^x+1)^2}=\frac{\cancel{e^{2x}}+e^x-\cancel{e^{2x}}}{(e^x+1)^2}$

$=\frac{e^x}{(e^x+1)^2}>0\ , x\in\mathbb{R}$

Άρα η φ ↗ στο $\mathbb{R}$

- Η φ είναι ↗ στο $\mathbb{R}$ και συνεχής, άρα δεν έχει ακρότατα.

- $$\varphi''(x) = \left(\frac{e^x}{(e^x+1)^2}\right)' = \frac{e^x(e^x+1)^{\cancel{2}} - e^x\, 2(\cancel{e^x+1})\, e^x}{(e^x+1)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$= \frac{e^{2x} + e^x - 2e^{2x}}{(e^x+1)^3} = \frac{e^x - e^{2x}}{(e^x+1)^3}$$

$$= \frac{e^x(1-e^x)}{(e^x+1)^3}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\varphi''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{e^x(1-e^x)}{(e^x+1)^3} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
φ''	$+$	0	$-$
φ	$\cup$	Σ.Κ.	$\cap$

Σ.Κ.: $A(0, \varphi(0))$ ή $A\left(0, \frac{1}{2}\right)$

Β4. Οριζόντιες ασύμπτωτες της C_φ και να σχεδιάσω τη C_φ.

- $$\lim_{x\to-\infty} \varphi(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{e^x+1} = \frac{0}{0+1} = 0$$

Άρα η C_φ έχει οριζόντια ασύμπτωτη την $y=0$ ($x'x$) στο $-\infty$

- $$\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x+1} \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{(e^x)'}{(e^x+1)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{e^x}}{\cancel{e^x}} = 1$$

Άρα η $C_φ$ έχει οριζόντια ασύμπτωτη την $y=1$, στο $+\infty$.