Γ1 $f(x)=\begin{cases} x^2+a &, x\geq 1 \\ e^{x-1}+bx &, x<1. \end{cases}$

Πρέπει

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=f(1) \Leftrightarrow$

$1+a=1+b \Leftrightarrow \boxed{a=b}$. (1)

και $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x^2+\cancel{a}-1-\cancel{a}}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to 1^+}(x+1)=2$.

$\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{e^{x-1}+bx-\cancel{1}^{2}-a}{x-1}$.

$\overset{0/0}{=}\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{e^{x-1}+b}{1}=1+b$.

Πρέπει $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$\Leftrightarrow b+1=2 \Leftrightarrow b=1$

οπότε (1) $\Longrightarrow a=1$.

Γ2 Για $x\geq 1$, $f'(x)=2x>0$, $x>1$

Για $x<1$, $f'(x)=e^{x-1}+1>0$, $x<1$.

Επειδή η f συνεχής στο $x=1$ τότε

η f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

Η f συνεχής και $\uparrow$ στο $\mathbb{R}$ οπότε

$f(\mathbb{R})=(\lim\limits_{x\to -\infty} f(x), \lim\limits_{x\to +\infty} f(x))=(-\infty,+\infty)$.

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to -\infty}(e^{x-1}+x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}(x^2+1)=+\infty$

Γ3 i) Αφού $f(0) = e^{-1} + 0 = \frac{1}{e}$.

Επειδή $f \uparrow$ και συνεχής στο $(-\infty, 0]$

τότε $f((-\infty, 0]) = (\lim_{x \to -\infty} f(x), f(0)] = (-\infty, \frac{1}{e}]$

Αφού $0 \in (-\infty, \frac{1}{e}]$ τότε υπάρχει

$x_0 \in (-\infty, 0) : f(x_0) = 0$.

ii) $f(x) \cdot (f(x) - x_0) = 0 \iff$

$f(x) = 0$ ή $f(x) = x_0$.

αδύνατη στο $(x_0, +\infty)$ αφού έχει μοναδική ρίζα το x_0.

Η $f \uparrow$ και συνεχής στο $(x_0, +\infty)$ οπότε

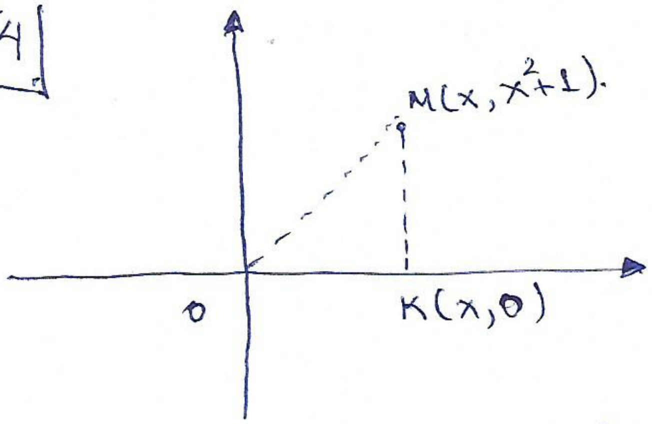
$f((x_0, +\infty)) = (\lim_{x \to x_0^+} f(x), \lim_{x \to +\infty} f(x))$

$= (0, +\infty)$.

Επειδή $x_0 < 0$, $x_0 \notin (0, +\infty)$

οπότε η $f(x) = x_0$ είναι αδύνατη στο $(x_0, +\infty)$.

Γ4



$M(\cancel{x}, x^2+1)$.

$y(t) = x^2(t) + 1$.

$x'(t_0) = 2$ μον/s.

$x(t_0) = 3$.

$y(t_0) = 10$

$$E(t) = \frac{x(t)\cdot(x^2(t)+1)}{2} = \frac{x^3(t)+x(t)}{2}.$$

$$E'(t) = \frac{3x^2(t)\cdot x'(t) + x'(t)}{2} = 3\cdot 3^2\cdot 2 + 2$$

Για $t = t_0 \rightarrow E'(t_0) = \dfrac{3x^2(t_0)\cdot x'(t_0) + x'(t_0)}{2}$

$$= \frac{3\cdot 3^2\cdot 2 + 2}{2} = 28 \text{ μον}^2/s.$$

Τηλ.: 210-6219712 / 210-6218894 www.apolito.gr - e-mail:info@apolito.gr
Λεωφόρος Μαραθώνος & Χρυσοστόμου Σμύρνης 3, 14565 Άγιος Στέφανος