Αν $f:[\alpha,\beta]\to IR$ παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύει: $f'(\alpha)=f'(\beta)=0$ τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ ε (α , β) τέτοιο ώστε: $f'(\xi)(\xi-\alpha)=f(\xi)-f(\alpha)$.

<u>Απόδειξη</u>

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\begin{cases} \dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} & , \quad x\in(\alpha,\beta] \\ 0 & , \quad x=\alpha \end{cases}$

Είναι $\lim\limits_{x\to\alpha^+} g(x)=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}=f'(\alpha)=0=g(\alpha)$, οπότε η g είναι συνεχής στο α.

Ακόμα $g'(x)=\dfrac{f'(x)(x-\alpha)-f(x)+f(\alpha)}{(x-\alpha)^2}$, $x\in(\alpha,\beta]$ και $g(\beta)=\dfrac{f(\beta)-f(a)}{\beta-\alpha}$.

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1. Αν $f(\alpha)=f(\beta)$ τότε θα ισχύει και $g(\alpha)=g(\beta)=0$. Για την g ισχύουν στο [α , β] οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle , οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ ε (α , β) τέτοιο ώστε: $g'(\xi)=0 \Leftrightarrow g'(\xi)=\dfrac{f'(\xi)(\xi-\alpha)-f(\xi)+f(\alpha)}{(\xi-\alpha)^2}=0 \Leftrightarrow f'(\xi)(\xi-\alpha)=f(\xi)-f(\alpha)$.
2. Αν $f(\alpha)<f(\beta)$ τότε θα ισχύει $g'(\beta)=\dfrac{f(\alpha)-f(\beta)}{(\beta-\alpha)^2}$<0. Άρα $\lim\limits_{x\to\beta^-}\dfrac{g(x)-g(\beta)}{x-\beta}<0$, οπότε θα υπάρχει δ>0 τέτοιο ώστε $\dfrac{g(x)-g(\beta)}{x-\beta}<0$, x ε (β-δ , β) δηλαδή $g(x)>g(\beta)$, x ε (β-δ , β). Όμως g(β)>0 και g(α)=0.
   Για τη συνάρτηση g υπάρχουν εσωτερικά x ε [α , β], παράδειγμα αυτά που βρίσκονται στο (β-δ , β), στα οποία έχει τιμές μεγαλύτερες του g(β) και του g(α).
   Αφού όμως g συνεχής στο [α , β] θα έχει μέγιστη τιμή.
   Αυτή θα πρέπει να είναι κάποια g(ξ) με ξ ε (α , β).
   Η g είναι παραγωγίσιμη στο ξ οπότε από το θεώρημα του Fermat πρέπει $g'(\xi)=0 \Leftrightarrow f'(\xi)(\xi-\alpha)=f(\xi)-f(\alpha)$.
3. Αν $f(\alpha)>f(\beta)$ τότε ομοίως με το 2.