ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΑΛΓΕΒΡΑΣ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1°

Α. Να αποδείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το $x-\rho$ είναι ίσο με $u=P(\rho)$.

Β. Ερωτήσεις Σωστό (Σ) – Λάθος (Λ)

i. Το x^4+7x^2+4 έχει σίγουρα μια θετική ρίζα.
ii. Το $x+1$ είναι παράγοντας του $x^\nu+1$. Άρα ν άρτιος.
iii. Το $2x^3-5\sqrt{2}x^2+\frac{3}{2}x$ είναι πολυώνυμο του x.
iv. Κάθε σταθερό πολυώνυμο δεν έχει βαθμό.
v. Έστω τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ και $degP(x)$ και $degQ(x)$ οι βαθμοί τους. Τότε ισχύουν:
α. $deg[P(x)+Q(x)]=degP(x)+degQ(x)$
β. $deg[P(x)\cdot Q(x)]=degP(x)\cdot degQ(x)$

ΘΕΜΑ 2°

Θεωρούμε την αριθμητική πρόοδο $3\,,\ 5\,,\ 7\,,\ 9\,,\ldots$

i. Να βρείτε **α)** τον 10° όρο της, **β)** το άθροισμα των 20 πρώτων όρων της
ii. Μεταξύ του 15ου όρου και του 25ου όρου της να παρεμβάλετε 7 αριθμούς ώστε να δημιουργηθεί μια νέα αριθμητική πρόοδος.

ΘΕΜΑ 3°

i. Να λυθεί η ανίσωση: $x^3-6x^2+11x-6>0$
ii. Να λυθεί η εξίσωση: $\sqrt{x^2+3x+10}=x+2$
iii. Να βρεθούν τα α, β ώστε το πολυώνυμο: $P(x)=x^4+(\alpha-\beta)x^3+2\alpha x^2-5x+4$ να διαιρείται με το $(x-1)^2$. Για τις τιμές που θα βρείτε, να λυθεί η εξίσωση $P(x)=0$.

ΘΕΜΑ 4°

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=2x^3+\alpha x^2+\beta x+6$ το οποίο, όταν διαιρεθεί με το $x-2$, αφήνει υπόλοιπο μηδέν, ενώ όταν διαιρεθεί με το $x+1$, αφήνει υπόλοιπο -12.

i. Να αποδείξετε ότι $\alpha=-9$ και $\beta=7$.
ii. Αν η ταυτότητα της διαίρεσης του $P(x)$ με το $(x-2)(x+1)$ είναι $P(x)=(x-2)(x+1)\pi(x)+\kappa x+\lambda$ με $\kappa,\lambda\in\mathbb{R}$
α) να προσδιορίσετε τα κ,λ και $\pi(x)$
β) να λύσετε την ανίσωση $P(x)\leq 4x-8$.

Τηλ./Fax.:210-6219712, Τηλ:210-6218894 www.apolito.gr – e-mail:info@apolito.gr
Λεωφόρος Μαραθώνος & Χρυσοστόμου Σμύρνης 3, 14565 Άγιος Στέφανος

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1^{Ο}

Α. Απόδειξη σχολικού

Β. **i.** Λ, **ii.**Λ, **iii.**Σ, **iv.**Λ, **v.** **α.** Λ, **β.** Λ

ΘΕΜΑ 2^{Ο}

i. α. $\alpha_{10} = \alpha_1 + 9\omega = 3 + 9 \cdot 2 = 21$

β. $s_{20} = \frac{20}{2} \cdot [2 \cdot 3 + (20-1) \cdot 2] = 10 \cdot 44 = 440$

ii. $\alpha_{15} = \alpha_1 + 14\omega = 3 + 14 \cdot 2 = 31$

$\alpha_{25} = \alpha_1 + 24\omega = 3 + 24 \cdot 2 = 51$

οπότε $31,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_5,\ x_6,\ x_7,\ 51$

$\beta_1 = 31 \quad \kappa\alpha\iota \quad \beta g = 51 \ \Leftrightarrow\ \beta_1 + 8\omega' = 51 \ \Leftrightarrow \omega' = \frac{10}{4} = 2,5$

άρα $x_1 = 33{,}5\,,\ x_2 = 36,\ x_3 = 38{,}5,\ x_4 = 41,\ x_5 = 43{,}5\,,\ x_6 = 46,\ x_7 = 48{,}5$

ΘΕΜΑ 3^{Ο}

i.

1	−6	11	−6	1
	1	−5	6	
1	−5	6	0	

$(x-1) \cdot (x^2 - 5x + 6) > 0$

x	$-\infty$	1		2		3	$+\infty$
$x-1$	−	0	+		+		+
x^2-5x+6	+		+	0	−	0	+
$(x-1)(x^2-5x+6)$	−	0	+	0	−	0	+

Άρα $x \in (1,\ 2) \cup (3, +\infty)$

ii. Περιορισμοί: $x^2 + 3x + 10 \geq 0$ ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Πρέπει $x + 2 \geq 0 \ \Leftrightarrow x \geq -2$

$x^2 + 3x + 10 = (x+2)^2 \ \Leftrightarrow\ x^2 + 3x + 10 = x^2 + 4x + 4 \ \Leftrightarrow\ \boxed{x = 6}$ δεκτή.

Τηλ./Fax.:210-6219712, Τηλ:210-6218894 www.apolito.gr – e-mail:info@apolito.gr
Λεωφόρος Μαραθώνος & Χρυσοστόμου Σμύρνης 3, 14565 Άγιος Στέφανος

iii.

1	$\alpha-\beta$	2α	-5	4	1
	1	$\alpha-\beta+1$	$3\alpha-\beta+1$	$3\alpha-\beta-4$	
1	$\alpha-\beta+1$	$3\alpha-\beta+1$	$3\alpha-\beta-4$	$3\alpha-\beta$	

Πρέπει: $3\alpha-\beta=0 \Leftrightarrow \beta=3\alpha$

και $\pi(x)=x^3+(\alpha-\beta+1)x^2+(3\alpha-\beta+1)x+3\alpha-\beta-4$

Πρέπει $\pi(1)=0 \Leftrightarrow 1+\alpha-\beta+1+3\alpha-\beta+1+3\alpha-\beta-4=0$

$7\alpha-3\beta=1 \quad \Leftrightarrow \quad 7\alpha-9\alpha=1 \quad \Leftrightarrow$

$\alpha=-\frac{1}{2} \qquad \kappa\alpha\iota \qquad \beta=-\frac{3}{2}$

οπότε $P(x)=x^4+x^3-x^2-5x+4=0$

1	1	-1	-5	4	1
	1	2	1	-4	
1	2	-1	-4	0	

1	2	1	-4	1
	1	3	4	
1	3	4	0	

$(x-1)\cdot(x^3+2x+x-4)=0$

οπότε $(\chi-1)^2\cdot(x^2+3x+4)=0 \Leftrightarrow x=1 \quad$ ή $\quad x^2+3x+4=0$

αδύνατη

ΘΕΜΑ 4^{O}

i. Πρέπει $\begin{cases} P(-1)=-12 \\ P(2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2+\alpha-\beta+6=-12 \\ 16+4\alpha+2\beta+6=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha-\beta=-16 \\ 4\alpha+2\beta=-22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha-\beta=-16 \\ 2\alpha+\beta=-11 \end{cases} \Leftrightarrow \quad 3\alpha=-27$

$\boxed{\alpha=-9}$ και $\boxed{\beta=7}$

ii. α. $2x^3-9x^2+7x+6=(x-2)(x+1)\cdot\pi(x)+\kappa\alpha+\lambda$

Για $x=2 \Rightarrow 0= \ 0+2\kappa+\lambda \Leftrightarrow \lambda=-2\kappa$

Για $x=-1 \Rightarrow -12=-\kappa+\lambda \Leftrightarrow -12=-3\kappa$

$\Leftrightarrow \boxed{\kappa=4}$ οπότε $\boxed{\lambda=-8}$

Άρα $2x^3-9x^2+7x+6=(x^2-x-2)\cdot\pi(x)+4x-8$

$2x^3-9x^2+3x+14=(x^2-x-2)\cdot\pi(x)$

$$\begin{array}{r|l} 2x^3-9x^2+3x+14 & x^2-x-2 \\ -2x^3+2x^2+4x & 2x-7 \\ \hline -7x^2+7x+14 & \\ 7x^2-7x-14 & \\ \hline \end{array}$$

Άρα $\pi(x) = 2x - 7$

β. $P(x) \leq 4x - 8 \iff 2x^3 - 9x^2 + 3x + 14 \leq 0$
$\iff (x+1)\cdot(x-2)\cdot(2x-7) \leq 0$

x	$-\infty$		-1		2		$\frac{7}{2}$		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$2x-7$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x+1)(x-2)(2x-7)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Άρα $x \in (-\infty, -1] \cup \left[2, \frac{7}{2}\right]$