ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Θέμα 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο του ύψους του που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι ίσο με το γινόμενο των προβολών των κάθετων πλευρών του στην υποτείνουσα.

Μονάδες 15

Β. Να χαρακτηρίσετε με την ένδειξη «ΣΩΣΤΟ» ή «ΛΑΘΟΣ», τις παρακάτω προτάσεις:

i. Αν ΑΒΓ αμβλυγώνιο τρίγωνο, τότε $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$.
ii. Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$, τότε το τρίγωνο είναι οξυγώνιο.
iii. Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\beta^2 + \gamma^2 = 2\mu_\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{2}$.
iv. Σε κύκλο (O,R) θεωρούμε τη χορδή ΑΒ. Αν σημείο Ρ κινείται πάνω στη χορδή ΑΒ, τότε η δύναμη του σημείου Ρ ως προς τον κύκλο (O,R) γίνεται μέγιστη όταν το Ρ είναι το μέσο της ΑΒ.
v. Δύο ισοδύναμα σχήματα είναι κατ' ανάγκη ίσα.

Μονάδες 10

Θέμα 2ο

Έστω ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ), με ΑΒ=4, ΓΔ=10 και ΒΓ=ΑΔ=5. Να υπολογίσετε:

i. το ύψος του τραπεζίου,

Μονάδες 8

ii. το εμβαδόν του τραπεζίου,

Μονάδες 8

iii. το εμβαδόν του ισόπλευρου τριγώνου με πλευρά τη διαγώνιο του τραπεζίου.

Μονάδες 9

Θέμα 3^{o}

Α. Να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδόν ενός ορθογώνιου τριγώνου, του οποίου οι πλευρές είναι διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί.

Μονάδες 13

Β. Σε ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ ($\hat{A} = 90^{0}$), με ύψος ΑΔ=x, ΒΔ= x-2 και ΓΔ=2x. Να υπολογίσετε:

i. το ύψος ΑΔ,

ii. τα μήκη των κάθετων πλευρών.

Μονάδες 12

Θέμα 4^{o}

Α. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και C ο περιγεγραμμένος κύκλος του. Αν η προέκταση της διαμέσου ΑΜ τέμνει τον C στο Κ να αποδείξετε ότι:

$$MK = \frac{\alpha^2}{2\sqrt{2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2}}$$

Μονάδες 10

Β. Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$, με $\hat{A} = 90^{0}$. Αν ισχύει $\hat{B} = 3\hat{\Gamma}$, να αποδείξετε ότι:

$$\beta^2 - \gamma^2 = 2\beta\gamma.$$

Μονάδες 15

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

ΛΥΣΕΙΣ

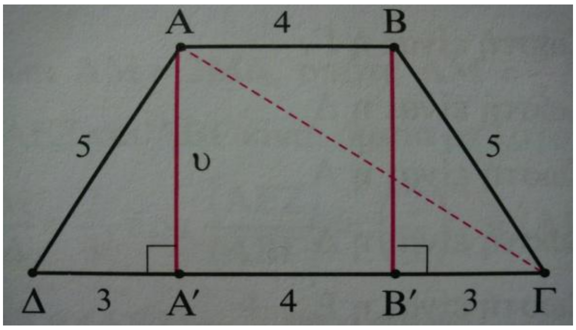
Θέμα 1ο

Α. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 184.

Β.

i. Λ
ii. Λ
iii. Σ
iv. Λ
v. Λ

Θέμα 2ο



iv. Εφαρμόζω το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΑ΄Δ και παίρνω υ=4.

v. $(ΑΒΓΔ) = \frac{(ΑΒ+ΓΔ)}{2}υ = 28$ τ.μ.

vi.Έχουμε $ΑΓ^2 = ΑΔ^2 + ΓΔ^2 - 2ΓΔ \cdot Α'Δ$=65 (θεώρημα οξείας γωνίας), οπότε το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$Ε = \frac{ΑΓ^2\sqrt{3}}{4} = \frac{65\sqrt{3}}{4} \text{ τ.μ.}$$

Τηλ./Fax.:210-6219712, Τηλ:210-6218894 www.apolito.gr – e-mail:info@apolito.gr
Λεωφόρος Μαραθώνος & Χρυσοστόμου Σμύρνης 3, 14565 Άγιος Στέφανος

Θέμα 3ο

Α. Έστω x, x+1, x+2 οι πλευρές του τριγώνου. Προφανώς η υποτείνουσα θα είναι η μεγαλύτερη πλευρά x+2, οπότε από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$$(x+2)^2=(x+1)^2+x^2 \Leftrightarrow x^2-2x-3=0 \Leftrightarrow x=-1\,(απορ.) \text{ ή } x=3$$

Συνεπώς η περίμετρος του τριγώνου είναι $Π=3+4+5=12$ και το εμβαδόν $E=\frac{3\cdot4}{2}=6$ τ.μ.

Β. Ισχύει $ΑΔ^2=ΒΔ\cdot ΓΔ \Leftrightarrow x^2=(x-2)x \Leftrightarrow x=0\,(απορ.)$ ή $x=4$. Οπότε:

i. ΑΔ=x=4

ii. $AB^2=BΓ\cdot BΔ \Leftrightarrow AB=2\sqrt{5}$ και $AΓ^2=BΓ\cdot ΓΔ \Leftrightarrow AΓ=4\sqrt{5}$

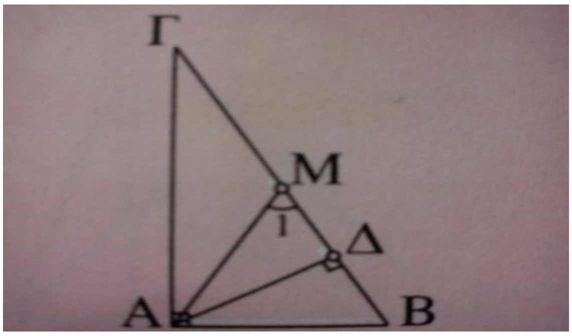
Θέμα 4ο

Α. Έχουμε:

$$MK\cdot MA=MB\cdot MΓ \Leftrightarrow MK=\frac{MB\cdot MΓ}{MA}$$

$$\Leftrightarrow MK=\frac{\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\frac{2\beta^2+2\gamma^2-\alpha^2}{4}}} \Leftrightarrow MK=\frac{\alpha^2}{2\sqrt{2\beta^2+2\gamma^2-\alpha^2}}$$

Β.



Από υπόθεση είναι $\hat{B}=3\hat{Γ}$, οπότε $\hat{B}>\hat{Γ}$ και συνεπώς $\beta>\gamma$.

Αν Μ είναι το μέσο της ΒΓ και ΜΔ η προβολή της διαμέσου ΑΜ στη ΒΓ, εφαρμόζουμε το 2ο θεώρημα διαμέσων στο τρίγωνο ΑΒΓ και παίρνουμε

$\beta^2-\gamma^2=2\alpha MΔ$ (1)

Ακόμη $\widehat{\mathrm{B}}+\widehat{\Gamma}=90^{0} \overset{(\Upsilon)}{\Leftrightarrow} 3\widehat{\Gamma}+\widehat{\Gamma}=90^{0} \Leftrightarrow 4\widehat{\Gamma}=90^{0} \Leftrightarrow \widehat{\Gamma}=22{,}5^{0}$ και επειδή το τρίγωνο ΑΓΜ είναι ισοσκελές, θα είναι και $\Gamma\widehat{\mathrm{A}}\mathrm{M}=22{,}5^{0}$. Όμως το τρίγωνο ΑΜΔ είναι ορθογώνιο και $\widehat{\mathrm{M}_1}=\widehat{\Gamma}+\Gamma\widehat{\mathrm{A}}\mathrm{M}=45^{0}$,άρα θα είναι και ισοσκελές με

$\mathrm{A}\Delta=\mathrm{M}\Delta\ (2)$.

Τέλος, τα τρίγωνα είναι ΑΒΓ και ΑΓΔ είναι ορθογώνια και έχουν κοινή τη $\widehat{\Gamma}$, οπότε είναι όμοια και ισχύει:

$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\mathrm{A}\Delta} \Leftrightarrow \beta\gamma=\alpha\mathrm{A}\Delta\ (3)$

Συνεπώς έχουμε:

$$(1) \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \beta^2-\gamma^2=2\alpha\mathrm{A}\Delta \overset{(3)}{\Leftrightarrow} \beta^2-\gamma^2=2\beta\gamma$$