ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΓΕΝΙΚΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1ο

α. i. Δίνεται η συνάρτηση $F(x) = f(x) + g(x)$. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες, να αποδείξετε ότι: $F'(x) = f'(x) + g'(x)$.

ii. Πότε μια συνάρτηση f σε ένα διάστημα Δ του πεδίου αριθμού της λέγεται γνησίως αύξουσα και πότε γνησίως φθίνουσα;

β. Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις προτάσεις που ακολουθούν ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ).

i. Το εύρος είναι μέτρο θέσης.

ii. Ισχύει $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g'(x)$, όπου f, g παραγωγίσιμες συναρτήσεις.

iii. Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται μόνο για τη γραφική παράσταση των ποσοτικών μεταβλητών.

iv. Όταν έχουμε κανονική κατανομή, η μέση τιμή συμπίπτει με τη διάμεσο.

v. Αν $f'(x_0) = 0$ τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ακρότατο της f.

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = 2x^3 + 4x - 2$

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

ii. Να δείξετε ότι στο σημείο $A(0, f(0))$ η εφαπτομένη της C_f έχει τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης.

iii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στο A.

iv. Να υπολογίσετε το $\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-4}{2x^2-3x+1}$.

ΘΕΜΑ 3ο

Στον παρακάτω πίνακα δίνεται η κατανομή των σχετικών συχνοτήτων των ωρών εργασίας ν υπαλλήλων μιας εταιρείας κατά τη διάρκεια μιας εβδομάδας.

Ώρες εργασίας	x_i	f_i
[25, 35)	30	0,4
[35, 45)	40	0,3
[45, 55)	50	0,2
[55, 65)	60	0,1

α. i. Να βρεθεί η μέση τιμή $\bar{x}$ της κατανομής.

ii. Να βρεθεί η ακριβής τιμή της διαμέσου δ.

β. Δίνεται ότι οι υπάλληλοι εργάζονται λιγότερο από 45 ώρες είναι 140.

i. Να βρεθεί η τυπική απόκλιση s.

ii. Η διοίκηση της εταιρίας αποφάσισε τη χορήγηση επιδόματος στους υπαλλήλους που εργάζονται εβδομαδιαίως από 61 ώρες και πάνω. Να βρεθεί το ποσοστό και το πλήθος των υπαλλήλων που θα πάρουν το επίδομα.

ΘΕΜΑ 4^{O}

Τα κέρδη (σε ευρώ) μιας αλυσίδας εμπορικών καταστημάτων ακολουθούν κατά προσέγγιση την κανονική κατανομή. Γνωρίζουμε ότι 168 καταστήματα έχουν κέρδη λιγότερα από 1200 € και 195 καταστήματα έχουν κέρδη περισσότερα από 600€.

Δίνεται ότι ο συνολικός αριθμός των καταστημάτων της αλυσίδας είναι 200.

α. Να βρείτε τη μέση τιμή, την τυπική απόκλιση και τη διάμεσο των κερδών.

β. Να βρείτε τη διακύμανση, το συντελεστή μεταβολής και να προσεγγίσετε το εύρος των κερδών.

γ. Μπορεί το σύνολο των καταστημάτων της εταιρείας να θεωρηθεί ομοιογενές ως προς τα κέρδη; Αν το δείγμα δεν είναι ομοιογενές κατά ποια σταθερή ποσότητα πρέπει να αυξηθούν τουλάχιστον τα κέρδη των καταστημάτων για να γίνει το δείγμα ομοιογενές;

δ. Να βρείτε τα ποσοστά των καταστημάτων των οποίων:

i. Τα κέρδη είναι περισσότερα από 1200€ .

ii. Τα κέρδη είναι μεταξύ των 600€ και των 1200€.

ε. Αν μια μέρα λόγω μειωμένης κίνησης τα κέρδη όλων των καταστημάτων μειωθούν κατά 15% πόσο θα μεταβληθεί ο συντελεστής μεταβολής;

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΓΕΝΙΚΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1ο

α. Βλέπε Θεωρία στο σχολικό βιβλίο.

β. i. Λ, ii. Λ, iii. Λ, iv. Σ, v. Λ

ΘΕΜΑ 2ο

i. Έχουμε για $f'(x) = 6x^2 + 4 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

ii. Ζητείται το σημείο στο οποίο η παράγωγος της f ελαχιστοποιείται.
$f''(x) = 12x$ και $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ και $f''(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$.
Κατασκευάζουμε τον πίνακα μεταβολής προσήμου της f''.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Ελάχιστο

Άρα η f' παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 0$ το $f'(0) = 4$. Επομένως στο σημείο $A(0, f(0))$ ή $A(0, -2)$ η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f έχει τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης.

iii. Έστω $y = \lambda x + \beta$ η εξίσωση της εφαπτομένης στο $A(0, -2)$. Έχουμε $\lambda = f'(0) = 4$ και το σημείο $A(0, -2)$ την επαληθεύει, άρα: $-2 = 4 \cdot 0 + \beta \Leftrightarrow \beta = -2$ και $y = 4x - 2$.

iv. Για $x \neq 1$ και $x \neq \frac{1}{2}$:

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - 4}{2x^2 - 3x + 1} = \lim_{x \to 1} \frac{2x^3 + 4x - 2 - 4}{2x^2 - 3x + 1}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{2x^3 + 4x - 6}{2x^2 - 3x + 1} = \lim_{x \to 1} \frac{2(x^3 + 2x - 3)}{2\left(x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}\right)} =$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{2(x-1)(x^2 + x + 3)}{2(x-1)\left(x - \frac{1}{2}\right)} =$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x + 3}{x - \frac{1}{2}} = \frac{5}{\frac{1}{2}} = 10$$

Τηλ./Fax.:210-6219712, Τηλ:210-6218894 www.apolito.gr – e-mail:info@apolito.gr
Λεωφόρος Μαραθώνος & Χρυσοστόμου Σμύρνης 3, 14565 Άγιος Στέφανος

Σχήμα Horner

1	0	2	-3	1
	1	1	3	
1	1	3	0	

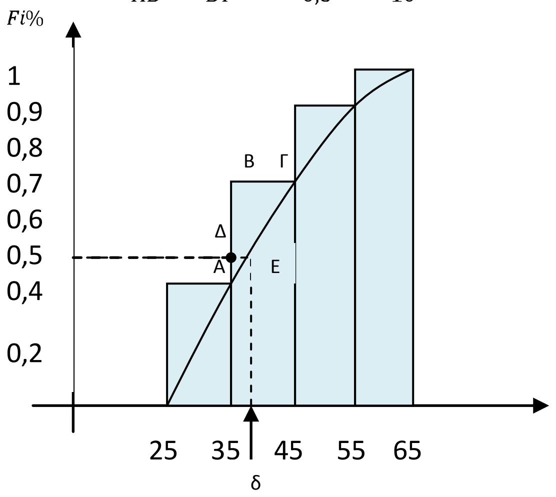
ΘΕΜΑ 3^o

α. i.

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{4} x_i f_1 =$$

$$= 30 \cdot 0{,}4 + 40 \cdot 0{,}3 + 50 \cdot 0{,}2 + 60 \cdot 0{,}1 = 40 \quad ώρες$$

ii. Για τη διάμεσο δ έχουμε: $F_1 = 0{,}4$, $F_2 = 0{,}7$, $f_3 = 0{,}9$ και $F_4 = 1$.
Κατασκευάζουμε το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων.
Τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΑΔΕ$ είναι όμοια.
Άρα $\frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \frac{ΔΕ}{ΒΓ} \Leftrightarrow \frac{0{,}1}{0{,}3} = \frac{\delta - 35}{10} \Leftrightarrow 3\delta - 105 = 10 \Leftrightarrow 3\delta = 115 \Leftrightarrow \delta = \frac{15}{3}$ ώρες.



β. i. Το 70% των υπαλλήλων εργάζεται λιγότερο από 45 ώρες .
Άρα $\frac{70}{100}\nu = 140 \Leftrightarrow \nu = 200$ υπάλληλοι.
Οι συχνότητες είναι: $\nu_1 = 200 \cdot 0{,}4 = 80$ υπάλληλοι,
$\nu_2 = 200 \cdot 0{,}3 = 60$ υπάλληλοι, $\nu_3 = 200 \cdot 0{,}2 = 40$ υπάλληλοι,
$\nu_4 = 200 \cdot 0{,}1 = 20$ υπάλληλοι.
Άρα $s^2 = \frac{1}{200}[(30-40)^2 80 + (40-40)^2 \cdot 60 + (50-40)^2 \cdot 40 + (60-40)^2 \cdot 20] =$
$\frac{1}{200}(8000 + 0 + 4000 + 8000) = 100.$
Επομένως $s = \sqrt{100} = 10.$

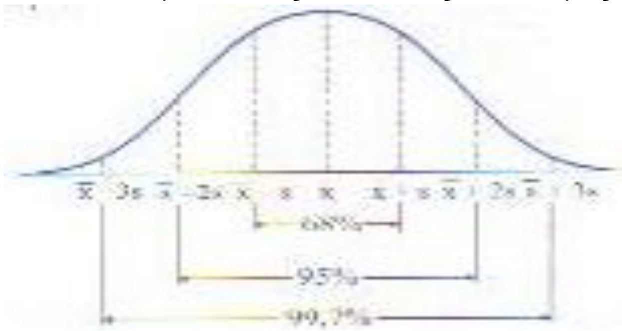
ii. Από 61 ώρες και πάνω βρίσκονται τα $\frac{4}{10} \cdot f_4$ των υπαλλήλων.
Δηλαδή το $0{,}04$ ή το 4% των υπαλλήλων.
Άρα το επίδομα θα πάρουν το 4% των υπαλλήλων ή $\frac{4}{100} \cdot 200 = 8$ υπάλληλοι.

Τηλ./Fax.:210-6219712, Τηλ:210-6218894 www.apolito.gr – e-mail:info@apolito.gr
Λεωφόρος Μαραθώνος & Χρυσοστόμου Σμύρνης 3, 14565 Άγιος Στέφανος

ΘΕΜΑ 4ο

α. Το ποσοστό των καταστημάτων που έχουν κέρδη λιγότερα από 1200 ευρώ είναι $\frac{168}{200} = 84\%$, ενώ το ποσοστό των καταστημάτων που έχουν κέρδη περισσότερα από 600 ευρώ είναι $\frac{195}{200} = 97{,}5\%$.

Από την καμπύλη της κανονικής κατανομής έχουμε:



Το 84% των καταστημάτων έχουν κέρδη λιγότερα από $\bar{x} + s$, ενώ το $97{,}5\%$ των καταστημάτων έχουν κέρδη περισσότερα από $\bar{x} - 2s$.

Άρα $\bar{x} - 2s = 600$ και $\bar{x} + s = 1200$.

Λύνοντας το σύστημα $\begin{cases} \bar{x} - 2s = 600 \\ \bar{x} + 2s = 1200 \end{cases}$

βρίσκουμε $\bar{x} = 1000\ ευρώ\ \ και\ \ s = 200\ ευρώ.$

Η διάμεσος στην κανονική κατανομή είναι ίση με τη μέση τιμή.

Άρα $\delta = \bar{x} = 1000\ ευρώ.$

β. Η διακύμανση είναι $s^2 = 200^2 = 40000$.

$CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{200}{1000} = 0{,}2$ ή 20%

Το εύρος είναι $R \simeq 6 \cdot s \simeq 6 \cdot 200 = 1200$ ευρώ.

γ. Το σύνολο των καταστημάτων δεν μπορεί να θεωρηθεί ομοιογενές ως προς τα κέρδη, αφού $CV = 0{,}2 > 0{,}1$.

Αν τα κέρδη αυξηθούν κατά c ευρώ έχουμε: $\bar{x}' = \bar{x} + c = 1000 + c$ και $s' = s = 200$ ευρώ

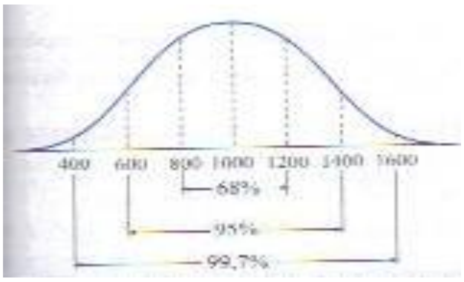
Για να είναι ομοιογενές πρέπει:

$CV' \leq 0{,}1 \Leftrightarrow \frac{s'}{\bar{x}'} \leq 0{,}1 \Leftrightarrow \frac{200}{1000+c} \leq 0{,}1 \Leftrightarrow 200 \leq 100 + 0{,}1c \Leftrightarrow c \geq 1000$ ευρώ.

Άρα, τα κέρδη πρέπει να αυξηθούν τουλάχιστον κατά $1000€$.

Τηλ./Fax.:210-6219712, Τηλ:210-6218894 www.apolito.gr – e-mail:info@apolito.gr
Λεωφόρος Μαραθώνος & Χρυσοστόμου Σμύρνης 3, 14565 Άγιος Στέφανος

δ. Για $\bar{x} = 1000€$ και $s = 200€$ η καμπύλη της κανονικής κατανομής γίνεται:



i. Το ποσοστό των καταστημάτων που έχουν κέρδος περισσότερο από $1200€$ είναι: $\frac{100\%-68\%}{2} = 16\%$
ii. Το ποσοστό των καταστημάτων που έχουν κέρδος από $600€$ μέχρι $1200€$ είναι $68\% + \frac{95\%-68\%}{2} = 68\% + 13{,}5\% = 81{,}5\%$

ε. Αφού όλα τα καταστήματα έχουν μείωση κερδών 15% το καινούριο μέσο κέρδος και η νέα τυπική απόκλιση θα είναι:

$$\bar{y} = \bar{x} - \frac{15}{100}\bar{x} = \frac{100-15}{100}\bar{x} = 0{,}85 \cdot \bar{x}$$

$$s_y = s - \frac{15}{100}s = \frac{85}{100}s = 0{,}85 \cdot s$$

Άρα, $CV_y = \frac{s_y}{\bar{y}} = \frac{0{,}85s}{0{,}85\bar{x}} = \frac{s}{\bar{x}} = CV$

Επομένως, δε θα υπάρχει καμία μεταβολή στο συντελεστή μεταβολής.

Τηλ./Fax.:210-6219712, Τηλ:210-6218894 www.apolito.gr – e-mail:info@apolito.gr
Λεωφόρος Μαραθώνος & Χρυσοστόμου Σμύρνης 3, 14565 Άγιος Στέφανος