ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ΑΛΓΕΒΡΑΣ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Διαλέγουμε ένα μαθητή στην τύχη. Η πιθανότητα να έχει κινητό τηλέφωνο είναι 70% , η πιθανότητα να έχει μηχανάκι είναι 35%, ενώ η πιθανότητα να έχει και τα δύο είναι 10%. Να βρεθεί η πιθανότητα:
i) Να έχει ένα τουλάχιστον από τα δυο.
ii) Να μην έχει κινητό τηλέφωνο.
iii) Να μην έχει μηχανάκι.
iv) Να μην έχει κανένα από τα δυο.
v) Να έχει μόνο ένα από τα δυο.
vi) Να έχει κινητό αλλά όχι μηχανάκι.

2. Από το σύνολο $\mathrm{A} = \{1, 2, 3\}$ επιλέγουμε τυχαία ψηφία και κατασκευάζουμε έναν τριψήφιο αριθμό. Να βρεθούν:
i) Ο δειγματικός χώρος του πειράματος.
ii) Τα ενδεχόμενα:
Α: «Ακριβώς δυο ψηφία να είναι 1» ,
Β: « Ένα τουλάχιστον ψηφίο είναι 2».
iii) Τα ενδεχόμενα: $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$, $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$, A' , B' , $\mathrm{B} - \mathrm{A}$, $(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})'$, $(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})'$.

3. α) Να αποδείξετε την ταυτότητα: $(x+y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x+y)$.

β) Αν $2\alpha + \dfrac{1}{\alpha} = 3$, να βρείτε την τιμή της παράστασης: $8\alpha^3 + \dfrac{1}{\alpha^3}$.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

1. Έστω A το ενδεχόμενο ο μαθητής να έχει κινητό τηλέφωνο και B το ενδεχόμενο ο μαθητής να έχει μηχανάκι. Τότε το ενδεχόμενο να έχει και τα δύο θα είναι $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$.
Οπότε έχουμε: $P(\mathrm{A}) = 70\%$, $P(\mathrm{B}) = 35\%$ και $P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = 10\%$.

i) Το ενδεχόμενο να έχει τουλάχιστον ένα από τα δύο είναι το $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$,άρα η πιθανότητα θα είναι:
$$P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) + P(\mathrm{B}) - P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = 70\% + 35\% - 10\% = 95\% .$$

ii) Το ενδεχόμενο να μην έχει κινητό τηλέφωνο είναι το A' ,άρα η πιθανότητα θα είναι: $P(\mathrm{A}') = 1 - P(\mathrm{A}) = 1 - 70\% = 30\%$.

iii) Το ενδεχόμενο να μην έχει μηχανάκι είναι το B' ,άρα η πιθανότητα θα είναι:
$$P(B') = 1 - P(B) = 1 - 35\% = 65\% .$$

Τηλ./Fax.:210-6219712, Τηλ:210-6218894 www.apolito.gr – e-mail:info@apolito.gr
Λεωφόρος Μαραθώνος & Χρυσοστόμου Σμύρνης 3, 14565 Άγιος Στέφανος

iv) Το ενδεχόμενο να μην έχει κανένα από τα δύο είναι το $(A\cup B)'$,άρα η πιθανότητα θα είναι: $P\left[(A\cup B)'\right]=1-P(A\cup B)=1-95\%=5\%$.

v) Το ενδεχόμενο να έχει μόνο κινητό είναι το $A-B$. Το ενδεχόμενο να έχει μόνο μηχανάκι είναι το $B-A$. Άρα το ενδεχόμενο να έχει μόνο ένα από τα δύο θα είναι το $(A-B)\cup(B-A)$. Οπότε για την πιθανότητά του έχουμε:

$P\left[(A-B)\cup(B-A)\right]=P(A-B)+P(B-A)$ από τον πρώτο προσθετικό νόμο, επειδή τα ενδεχόμενα $A-B$ και $B-A$ είναι ασυμβίβαστα. Άρα:

$P\left[(A-B)\cup(B-A)\right]=P(A-B)+P(B-A)=P(A)-P(A\cap B)+P(B)-P(A\cap B)$
$=70\%-10\%+35\%-10\%=85\%$.

vi) Το ενδεχόμενο να έχει κινητό αλλά όχι μηχανάκι είναι το ενδεχόμενο $A-B$.
Άρα $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=70\%-10\%=60\%$.

2. i) Κατασκευάζοντας το δεντροδιάγραμμα εύκολα βρίσκουμε ότι ο δειγματικός χώρος του πειράματος είναι:
$\Omega=\{111,112,113,121,122,123,131,132,133,$
$211,212,213,221,222,223,231,232,233,$
$311,312,313,321,322,323,331,332,333\}$

ii) Τα ενδεχόμενα Α και Β είναι: $A=\{112,113,121,131,211,311\}$,
$B=\{112,121,122,123,132,211,212,213,221,222,223,231,232,233,312,321,322,323,332\}$

iii) Έχουμε:
$A\cup B=\{112,113,121,122,123,131,132,211,212,213,221,222,223,231,232,233,$
$311,312,321,322,323,332\}$
$A\cap B=\{112,121,211\}$
$A'=\{111,122,123,132,133,212,213,221,222,223,231,232,233,$
$312,313,321,322,323,331,332,333\}$
$B'=\{111,113,131,133,311,313,331,333\}$
$B-A=\{122,123,132,212,213,221,222,223,231,232,233,312,321,322,323,332\}$
$(A\cup B)'=\{111,133,313,331,333\}$
$(A\cap B)'=\{111,113,122,123,131,132,133,212,213,221,222,223,231,232,233,$
$331,312,313,321,322,323,331,332,333\}$

3. α) Κάνοντας πράξεις και στα δύο μέλη ταυτόχρονα αμέσως βρίσκουμε:

$$(x+y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x+y) \Leftrightarrow x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = x^3 + y^3 + 3x^2y + 3xy^2$$

το οποίο ισχύει! Άρα η ζητούμενη ισότητα ισχύει.

β) Παίρνουμε τη ζητούμενη ισότητα και την υψώνουμε εις την τρίτη, Οπότε έχουμε:

$2\alpha + \frac{1}{\alpha} = 3 \Leftrightarrow \left(2\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^3 = 3^3$. Όμως από το πρώτο ερώτημα ισχύει ότι:

$\left(2\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^3 = 2\alpha^{3} + \left(\frac{1}{a}\right)^3 + 3 \cdot 2a \cdot \frac{1}{a}\left(2a + \frac{1}{a}\right)$ αν βάλουμε όπου x το 2α και όπου y το $\frac{1}{\alpha}$.

Άρα η σχέση $\left(2\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^3 = 3^3$,αντικαθιστώντας το παραπάνω γίνεται:

$$2\alpha^{3} + \left(\frac{1}{a}\right)^3 + 3 \cdot 2a \cdot \frac{1}{a}\left(2a + \frac{1}{a}\right) = 27 \Leftrightarrow 8a^3 + \frac{1}{a^3} + 6\left(2a + \frac{1}{a}\right) = 27 .$$

Αντικαθιστούμε τώρα το $2\alpha + \frac{1}{\alpha} = 3$ και κάνοντας πράξεις παίρνουμε το ζητούμενο:

$$8a^3 + \frac{1}{a^3} + 6 \cdot 3 = 27 \Leftrightarrow 8a^3 + \frac{1}{a^3} + 18 = 27 \Leftrightarrow 8a^3 + \frac{1}{a^3} = 9 .$$