

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΑΛΓΕΒΡΑΣ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Στη στήλη A είναι οι προϋποθέσεις που ισχύουν για μια γωνία θ και στη στήλη B το τεταρτημόριο της τελικής της πλευράς. Να γίνει η αντιστοιχία.

Στήλη A	Στήλη B
A. $\eta\mu\theta > 0$ και $\sigma\upsilon\nu\theta < 0$	1. 1 ^ο τεταρτημόριο
B. $\sigma\upsilon\nu\theta > 0$ και $\epsilon\varphi\theta < 0$	2. 2 ^ο τεταρτημόριο
Γ. $\eta\mu\theta \cdot \sigma\upsilon\nu\theta > 0$ και $\epsilon\varphi\theta \cdot \eta\mu\theta < 0$	3. 3 ^ο τεταρτημόριο
	4. 4 ^ο τεταρτημόριο

A.	
B.	
Γ.	

B. Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία της στήλης A με τα ίσα τους στη στήλη B.

Στήλη A	Στήλη B
A. $1 - \eta\mu^2\omega$	1. $\frac{1}{\sigma\varphi\omega}$
B. $\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega}$	2. $\sigma\varphi\omega$
Γ. $\frac{\epsilon\varphi^2\omega}{1 + \epsilon\varphi^2\omega}$	3. $\eta\mu^2\omega$
Δ. $\epsilon\varphi\omega$	4. $\sigma\upsilon\nu^2\omega$
	5. $1 + \epsilon\varphi^2\omega$

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

1. Για κάθε γωνία ω ισχύει $|\eta\mu\omega| \leq 1$
2. $\eta\mu(2\kappa\pi + \omega) = -\eta\mu\omega$, $\kappa \in \mathbb{Z}$
3. $\epsilon\varphi\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right) = \sigma\varphi\omega$
4. $\sigma\upsilon\nu(180^\circ - \omega) + \sigma\upsilon\nu\omega = 0$
5. $\eta\mu\omega + \eta\mu(-\omega) = 0$

ΘΕΜΑ 2^ο

A. Μια επίκεντρη γωνία ω βαίνει σε τόξο μήκους 20cm. Να εκφράσετε τη γωνία ω σε ακτίνια, αν η ακτίνα του κύκλου είναι $\rho = 5\text{cm}$.

B. Να εκφράσετε τη γωνία:

i) 120° σε rad

ii) $\frac{3\pi}{4}$ rad σε μοίρες

Γ. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών:

i) 765° ii) $\frac{49\pi}{6} \text{ rad}$

ΘΕΜΑ 3°

A. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

1. $A = \frac{\sigma\upsilon\nu 0 \cdot \eta\mu \frac{2\pi}{3} \cdot \epsilon\varphi \frac{5\pi}{6}}{\eta\mu \frac{3\pi}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{3\pi}{4} \cdot \sigma\varphi \left(-\frac{\pi}{4}\right)}$

2. $B = 2\eta\mu^2(-\omega) - 3\epsilon\varphi(\pi - \omega) \cdot \epsilon\varphi\left(\frac{3\pi}{2} - \omega\right) + 2\sigma\upsilon\nu^2(\pi + \omega)$

B. Αν $\sigma\varphi\omega = -\frac{5}{12}$ και $270^\circ < \omega < 360^\circ$, να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω .

Γ. Αν $0 < x < \pi$, να δείξετε ότι: $\sqrt{\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{1+\sigma\upsilon\nu x}} - \sqrt{\frac{1+\sigma\upsilon\nu x}{1-\sigma\upsilon\nu x}} = -2\sigma\varphi x$

ΘΕΜΑ 4°

A. Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

1. $\eta\mu^4\omega - \sigma\upsilon\nu^4\omega = 1 - 2\sigma\upsilon\nu^2\omega$

2. $\sigma\varphi^2\alpha - \sigma\upsilon\nu^2\alpha = \sigma\varphi^2\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu^2\alpha$

B. Για ποιες τιμές του $\kappa \in \mathbb{R}$ υπάρχει γωνία ω , ώστε να ισχύει:

1. $\eta\mu\omega = \frac{\kappa+2}{\kappa-2}$ και $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{2\kappa}{\kappa-2}$

2. $\epsilon\varphi\omega = \frac{3\kappa}{\kappa-2}$ και $\sigma\varphi\omega = \frac{\kappa}{2-\kappa}$

Γ. Να δείξετε ότι: $\eta\mu^2\left(\frac{\pi}{8} + x\right) + \eta\mu^2\left(x - \frac{3\pi}{8}\right) = 1$.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1^ο

A.

A.	2
B.	3
Γ.	4

B.

A.	4
B.	5
Γ.	3
Δ.	1

Γ.

1	Σ
2	Λ
3	Λ
4	Σ
5	Σ

ΘΕΜΑ 2^ο

A. 1 rad αντιστοιχεί σε τόξο μήκους 5cm.

ω rad αντιστοιχεί σε τόξο μήκους 20cm.

$$\frac{1}{\omega} = \frac{5}{20} \Leftrightarrow \omega = 4 \text{ rad.}$$

B. i. $\frac{\alpha}{\pi} = \frac{120^{\circ}}{180^{\circ}} \Leftrightarrow \alpha = \frac{2\pi}{3} \text{ rad}$

ii. $\frac{\frac{3\pi}{4}}{\pi} = \frac{\mu}{180} \Leftrightarrow 4\mu = 3 \cdot 180 \Leftrightarrow \mu = 45^{\circ}$

Γ. i. $\eta\mu 765^{\circ} = \eta\mu(2 \cdot 360^{\circ} + 45^{\circ}) = \eta\mu 45^{\circ} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\sigma\upsilon\nu 765^{\circ} = \eta\mu(2 \cdot 360^{\circ} + 45^{\circ}) = \sigma\upsilon\nu 45^{\circ} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\varepsilon\varphi 765^{\circ} = \eta\mu(2 \cdot 360^{\circ} + 45^{\circ}) = \varepsilon\varphi 45^{\circ} = 1$$

$$\sigma\varphi 765^0 = \eta\mu(2 \cdot 360^0 + 45^0) = \sigma\varphi 45^0 = 1$$

$$\text{ii. } \eta\mu\left(\frac{49\pi}{6}\right) = \eta\mu\left(8\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \eta\mu\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{49\pi}{6}\right) = \eta\mu\left(8\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\varepsilon\varphi\left(\frac{49\pi}{6}\right) = \eta\mu\left(8\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \varepsilon\varphi\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sigma\varphi\left(\frac{49\pi}{6}\right) = \eta\mu\left(8\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \sigma\varphi\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$$

ΘΕΜΑ 3^ο

$$\text{A. 1. } A = \frac{1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}{-1 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot (-1)} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{2. } B &= 2\eta\mu^2\omega - 3(-\varepsilon\varphi\omega) \cdot \sigma\varphi\omega + 2\sigma\upsilon\nu^2\omega \\ &= 2(\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega) + 3\varepsilon\varphi\omega \cdot \sigma\varphi\omega \\ &= 2 + 3 = 5 \end{aligned}$$

$$\text{B. } \varepsilon\varphi\omega = \frac{1}{\sigma\varphi\omega} = -\frac{12}{5}$$

$$\sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2\omega} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{1}{1+\frac{144}{25}} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{25}{169}$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{5}{13} \quad \text{αφού } 270^0 < \omega < 360^0$$

$$\eta\mu^2\omega = \frac{\varepsilon\varphi^2\omega}{1+\varepsilon\varphi^2\omega} \Leftrightarrow \eta\mu^2\omega = \frac{\frac{144}{25}}{1+\frac{144}{25}} \Leftrightarrow \eta\mu^2\omega = \frac{144}{169}$$

$$\eta\mu\omega = -\frac{12}{13} \quad \text{αφού } 270^0 < \omega < 360^0$$

$$\begin{aligned} \text{Γ. } &\sqrt{\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{1+\sigma\upsilon\nu x}} - \sqrt{\frac{1+\sigma\upsilon\nu x}{1-\sigma\upsilon\nu x}} = \sqrt{\frac{(1-\sigma\upsilon\nu x)^2}{(1+\sigma\upsilon\nu x)(1-\sigma\upsilon\nu x)}} - \sqrt{\frac{(1+\sigma\upsilon\nu x)^2}{(1+\sigma\upsilon\nu x)(1-\sigma\upsilon\nu x)}} \\ &= \sqrt{\left(\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}\right)^2} - \sqrt{\left(\frac{1+\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}\right)^2} = \frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} - \frac{1+\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} \\ &= \frac{-2\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} = -2\sigma\varphi x \quad \text{αφού } 0 < x < \pi \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 4^ο

$$\text{A. 1. } \eta\mu^2\omega - \sigma\upsilon\nu^4\omega = (\eta\mu^2\omega - \sigma\upsilon\nu^2\omega)(\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega) = 1 - 2\sigma\upsilon\nu^2\omega$$

$$\begin{aligned} \text{2. } \sigma\varphi^2\alpha - \sigma\upsilon\nu^2\alpha &= \frac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\eta\mu^2\alpha} - \sigma\upsilon\nu^2\alpha \\ &= \frac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha(1-\eta\mu^2\alpha)}{\eta\mu^2\alpha} \\ &= \sigma\varphi^2\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu^2\alpha \end{aligned}$$

$$\text{B. 1. Πρέπει } \eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{(\kappa+2)^2}{(\kappa-2)^2} + \frac{(2\kappa)^2}{(\kappa-2)^2} = 1 \quad \kappa \neq 2 \Leftrightarrow$$

$$\kappa^2 + 4\kappa + 4 + 4\kappa^2 = \kappa^2 - 4\kappa + 4 \Leftrightarrow$$

$$4\kappa^2 + 8\kappa = 0 \Leftrightarrow 4\kappa(\kappa + 2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\kappa = 0 \quad \text{ή} \quad \kappa = -2$$

2. Πρέπει $\varepsilon\varphi\omega \cdot \sigma\varphi\omega = 1 \Leftrightarrow \frac{3\kappa}{\kappa-2} \cdot \frac{\kappa}{2-\kappa} = 1 \Leftrightarrow$
 $4\kappa^2 = -\kappa^2 + 4\kappa - 4 \Leftrightarrow 5\kappa^2 - 4\kappa + 4 = 0$
αδύνατο αφού $\Delta = 16 - 80 = -64 < 0$

Γ. Παρατηρώ ότι: $\frac{\pi}{8} + x + \frac{3\pi}{8} - x = \frac{\pi}{2}$ οπότε

$$\eta\mu\left(\frac{3\pi}{8} - x\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{8} + x\right)$$

$$\begin{aligned}\text{Άρα } \eta\mu^2\left(\frac{\pi}{8} + x\right) + \eta\mu^2\left(x - \frac{3\pi}{8}\right) &= \eta\mu^2\left(\frac{\pi}{8} + x\right) + \left[-\eta\mu\left(\frac{3\pi}{8} - x\right)\right]^2 \\ &= \eta\mu^2\left(\frac{\pi}{8} + x\right) + \sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\pi}{8} + x\right) \\ &= 1\end{aligned}$$