απόλυτο
εκπαιδευτικός οργανισμός

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΑΛΓΕΒΡΑΣ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1^{O}

I. Να αποδείξετε ότι ο νιοστός όρος μιας αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω είναι $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1) \cdot \omega$.

II. Πότε μια ακολουθία λέγεται αριθμητική πρόοδος;

III. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

i) Στην ταυτότητα της διαίρεσης πολυωνύμων το υπόλοιπο έχει βαθμό ο οποίος είναι μικρότερος από το βαθμό του διαιρέτη.
ii) Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου P(χ) με το $\chi - \rho$ έχει βαθμό 0.
iii) Αν για το πολυώνυμο P(χ) είναι P(ρ) ≠ 0, τότε το P(χ) δεν έχει παράγοντα το $\chi - \rho$.
iv) Αν η διαίρεση του πολυωνύμου P(χ) με το $\chi - \rho$ είναι τέλεια, τότε ο αριθμός ρ είναι ρίζα του πολυωνύμου P(χ) .

i	ii	iii	iv

ΘΕΜΑ 2^{O}

I. Έστω η αριθμητική πρόοδος 7, 4, 1 …..
Να βρείτε το νιοστό και τον 8^{o} όρο της.

II. Έστω η αριθμητική πρόοδος $-9, -6, -3, \ldots$
i) Να βρείτε το άθροισμα των 20 πρώτων όρων της.
ii) Πόσους πρώτους όρους πρέπει να πάρουμε για να έχουμε άθροισμα 45;

III. Έστω η ακολουθία $\alpha_\nu = 3\nu - 2$
i) Να δείξετε ότι η ακολουθία (α_ν) είναι αριθμητική πρόοδος.
ii) Να βρείτε τη διαφορά και τον πρώτο όρο της.

ΘΕΜΑ 3^{O}

I. Να λύσετε τις εξισώσεις:
$\boldsymbol{i})\sqrt{5\chi + 10} = 8 - \chi$.
$\boldsymbol{ii})\sqrt{\chi + 2} + 2 = \sqrt{\chi - 6}$.

II. Να βρείτε τα α, β, ώστε το πολυώνυμο $P(\chi) = \alpha\chi^3 - 5\chi^2 + \beta\chi + 9$ να έχει παράγοντα το $(\chi - 3)^2$.

III. Να βρείτε τα διαστήματα του χ, στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(\chi) = \chi^4 - 5\chi^3 + 5\chi - 1$ βρίσκεται:
α) πάνω από τον άξονα χ΄χ, **β)** κάτω από τον άξονα χ΄χ.

ΘΕΜΑ 4^{O}

Έστω P(χ) πολυώνυμο 3ου βαθμού, το οποίο διαιρείται με το πολυώνυμο $\chi^2 + 1$, έχει ρίζα το 0 και του οποίου το άθροισμα των συντελεστών είναι ίσο με 2.

α) Να αποδείξετε ότι $P(\chi) = \chi^3 + \chi$.
β) Να λύσετε την ανίσωση: $(P(\chi) - 2)^3 + (P(\chi) - 2)^2 + P(\chi) > 2$.

ΛΥΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ

ΘΕΜΑ 1^{Ο}

I. Θεωρία σχολικού βιβλίου
II. Θεωρία σχολικού βιβλίου
III. i) Λ, ii) Λ, iii) Σ, iv) Σ

ΘΕΜΑ 2^{Ο}

I. Επειδή η ακολουθία 7, 4, 1 ….. είναι αριθμητική πρόοδος, έχουμε: $\omega = 4 - 7 = -3 \ \kappa\alpha\iota\ \alpha_1 = 7$
Οπότε
- $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega = 7 + (\nu - 1)(-3) = -3\nu + 10$
- $\alpha_8 = \alpha_1 + (8 - 1)\omega = 7 + 7(-3) = -14$

II. Είναι $\alpha_1 = -9 \ \kappa\alpha\iota\ \omega = -6 - (-9) = 3$
i) Έχουμε $S_{20} = \frac{20}{2}[2\alpha_1 + (20 - 1)\omega] = 10 \cdot [2 \cdot (-9) + 19 \cdot 3] = 390$
ii) Έστω, ότι πάρουμε τους ν πρώτους όρους.
Έχουμε: $S_\nu = 45 \Leftrightarrow \frac{\nu}{2}[2\alpha_1 + (\nu - 1)\omega] = 45 \Leftrightarrow$
$\nu \cdot [2 \cdot (-9) + (\nu - 1) \cdot 3] = 90 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \nu^2 - 7\nu - 30 = 0$
$\Leftrightarrow \nu = 10$ ή $\nu = -3$, που απορρίπτεται, αφού $\nu \in N^*$.
Άρα πρέπει να πάρουμε τους 10 πρώτους όρους.

III. **i)** Αρκεί να δείξουμε ότι η διαφορά $\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu$ είναι σταθερός αριθμός (δηλαδή ανεξάρτητος του ν).
Πράγματι, $\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = 3(\nu + 1) - 2 - (3\nu - 2) = 3\nu + 3 - 2 - 3\nu + 2 = 3$

ii) Η διαφορά της αριθμητικής προόδου είναι 3 και έχει πρώτο όρο $\alpha_1 = 3 \cdot 1 - 2 = 1$.

ΘΕΜΑ 3^{Ο}

I. **i)**Περιορισμοί: $5\chi + 10 \geq 0 \Leftrightarrow \chi \geq -2$
τότε $\sqrt{5\chi + 10}^2 = (8 - \chi)^2 \Leftrightarrow 5\chi + 10 = 64 - 16\chi + \chi^2$
$\Leftrightarrow \chi^2 - 21\chi + 54 = 0$
$\Delta = 441 - 216 = 225 \qquad \chi_{1,2} = \frac{21 \pm 15}{2} \Leftrightarrow$
$\chi = 18$ ή $\chi = 3$

- Για $\chi = 3$ $\acute{\varepsilon}\chi o\upsilon\mu\varepsilon$: $\sqrt{5 \cdot 3 + 10} = 8 - 3 \Leftrightarrow 5 = 5$ ισχύει → δεκτή
- Για $\chi = 18$ $\acute{\varepsilon}\chi o\upsilon\mu\varepsilon$: $\sqrt{5 \cdot 18 + 10} = 8 - 18 \Leftrightarrow 10 = -10$ αδύνατο → απορρίπτεται

ii) Περιορισμοί: $\begin{cases} \chi + 2 \geq 0 \\ \chi - 6 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\chi \geq 6}$

$$\left(\sqrt{\chi+2}+2\right)^2 = \sqrt{\chi-6}^2 \Leftrightarrow \chi + 2 + 4\sqrt{\chi+2} + 4 = \chi - 6$$
$$\Leftrightarrow 4\sqrt{\chi+2} = -12 \quad \alpha\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\tau\eta.$$

II. Πρέπει P(3)=0 δηλ.

α	-5	β	9	3
	3α	9α-15	27α+3β-45	
α	3α-5	9α+β-15	27α+3β-36	

άρα $27\alpha + 3\beta - 36 = 0 \Leftrightarrow 9\alpha + \beta = 12 \quad (1)$
και το $\pi(\chi) = \alpha\chi^2 + (3\alpha - 5)\chi + 9\alpha + \beta - 15$ πρέπει να έχει ρίζα το 3,
δηλαδή $\pi(3) = 0 \Leftrightarrow 9\alpha + 9\alpha - 15 + 9\alpha + \beta - 15 = 0$
$\Leftrightarrow 27\alpha + \beta = 3 \quad (2)$
Από $(2) - (1) \Rightarrow 18\alpha = 18 \Leftrightarrow \boxed{\alpha = 1}$
Από $(1) \Rightarrow 9 + \beta = 12 \Leftrightarrow \boxed{\beta = 3}$

III.

1	-5	0	5	-1	1
	1	-4	-4	1	
1	-4	-4	1	0	

$$f(\chi) = (\chi - 1) \cdot (\chi^3 - 4\chi^2 - 4\chi + 1)$$

1	-4	-4	1	-1
	-1	5	-1	
1	-5	1	0	

$$f(x) = (\chi - 1) \cdot (\chi + 1) \cdot (\chi^2 - 5\chi + 1)$$

Από $\chi^2 - 5\chi + 1 = 0 \Leftrightarrow \chi_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$

χ	$-\infty \quad -1$	$\frac{5-\sqrt{21}}{2}$	1	$\frac{5+\sqrt{21}}{2}$	$+\infty$
$\chi-1$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
$\chi+1$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$\chi^2-5\chi+1$	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

i) Η $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \ (-\infty,-1) \cup \left(\frac{5-\sqrt{21}}{2},1\right) \cup (\frac{5+\sqrt{21}}{2},+\infty)$

ii) Η $f(\chi) < 0 \Leftrightarrow \chi \in \ \left(-1,\frac{5-\sqrt{21}}{2},\right) \cup (1,\frac{5+\sqrt{21}}{2})$

<u>ΘΕΜΑ 4Ο</u>

α) Έστω $P(\chi) = \alpha\chi^3 + \beta\chi^2 + \gamma\chi + \delta, \quad P(0) = 0 \ \Leftrightarrow \delta = 0.$

$$\alpha\chi^3 + \beta\chi^2 + \gamma\chi = (\chi^2+1)(\kappa\chi+\lambda) \dots\dots = \kappa\chi^3 + \lambda\chi^2 + \kappa\chi + \lambda$$

Οπότε $\kappa = \alpha, \ \lambda = \beta, \ \kappa = \gamma, \ \lambda = 0.$ Όμως $\alpha + \beta + \gamma = 2$ οπότε τελικά $\alpha = \gamma = 1, \ \beta = 0.$

Επομένως $P(\chi) = \chi(\chi^2+1) = \chi^3 + \chi.$

β) $(\chi^3+\chi-2)^3 + (\chi^3+\chi-2)^2 + \chi^3 + \chi - 2 > 0,$

Θέτουμε $\chi^3 + \chi - 2 = \omega,$ οπότε έχουμε $\omega^3 + \omega^2 + \omega > 0 \ \Leftrightarrow$

$\omega(\omega^2+\omega+1) > 0 \ \Leftrightarrow \omega > 0$ διότι $\omega^2 + \omega + 1 > 0.$

Δηλαδή $\chi^3 + \chi - 2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\chi-1)(\chi^2+\chi+2) > 0 \Leftrightarrow \chi > 1$ διότι

$\chi^2 + \chi + 2 > 0$ για κάθε χ.