ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1$^{\mathrm{O}}$

Έστω η συνάρτηση:

$f(z)=\frac{2iz+3}{z+i},\ z\in C-\{-i\}$

i. Να δείξετε ότι $f(z)\neq 2i$ και να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$K=|f(z)-2i|\cdot|z+i|$

ii. Να λυθεί η εξίσωση:

$f(z)=2z$

iii. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του

$z\ \ \alpha\nu\ \ f(z)=f(\bar{z})$

iv. Αν $z=\alpha+\beta i, \alpha\beta\in R\quad \kappa\alpha\iota\quad \alpha^2+(\beta+1)^2=1$

Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του $f(z)$

ΘΕΜΑ 2$^{\mathrm{O}}$

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση:

$f(x)=\begin{cases} |z+2|\cdot x+2, & x\leq 0 \\ |z|\cdot\ln(x+e)-2, & x>0 \end{cases}\qquad \mu\varepsilon\ z\in C-\{-2\}$

και ο μιγαδικός $\omega=\frac{2z+8}{z+2}$.

i. Να δείξετε ότι $|z|=4$
ii. Να βρεθούν εκείνοι οι μιγαδικοί z για τους οποίους ισχύει:

$Re\ (z+\frac{1}{z})=\frac{17}{16}\ Im\ (z)$

iii. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του μιγαδικού αριθμού ω.
iv. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\chi_0\in[-1,0)$ τέτοιο ώστε $f(\chi_0)=0$

ΛΥΣΗ

ΘΕΜΑ 1^Ο

i. • $f(z) \neq 2i \Leftrightarrow \frac{2iz+3}{z+i} \neq 2i \Leftrightarrow 2iz+3 \neq 2i(z+i)$
$\Leftrightarrow 2iz+3 \neq 2iz-2 \Leftrightarrow 5 \neq 0$, *που ισχύει*
• $K = |f(z)-2i| \cdot |z+i| = \left|\frac{2iz+3}{z+i} - 2i\right| |z+i|$

$= \left|\frac{2iz+3-2i(z+i)}{z+i}\right| |z+i| = \frac{|2iz+3-2iz+2|}{|z+i|} \ |z+i| = |5| = 5$

ii. $f(z) = 2z \Leftrightarrow \frac{2iz+3}{z+1} = 2z \Leftrightarrow 2iz+3 = 2z(z+1)$
$\Leftrightarrow 2iz+3 = 2z^2+2zi \Leftrightarrow z^2 = \frac{3}{2} \Leftrightarrow z = \pm\frac{\sqrt{6}}{2}$

iii. $f(z) = f(\bar{z}) \Leftrightarrow \frac{2_i\bar{z}+3}{z+i} = \frac{2i+\bar{z}3}{\bar{z}+i} \Leftrightarrow (2iz+3)(\bar{z}+i) = (2i\bar{z}+3)(z+i)$
$\Leftrightarrow 2iz\bar{z} - 2z + 3\bar{z} + 3i = 2iz\bar{z} - 2z + 3z + 3i$
$\Leftrightarrow 5\bar{z} = 5z \Leftrightarrow \bar{z} - z = 0 \Leftrightarrow 2Im(z)i = 0$
$\Leftrightarrow Im(z) = 0 \Leftrightarrow z \in R$
Άρα ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι η ευθεία με εξίσωση $\psi = 0$
(ο άξονας χ΄χ).

iv. Είναι $z = \alpha + \beta i \ \kappa\alpha\iota \ \alpha^2 + (\beta+1)^2 = 1$, $\acute{\alpha}\rho\alpha \ |z+i| = 1$
Οπότε από (α) έχουμε:
$K = 5 \Leftrightarrow |f(z)-2i||z+i| = 5 \Leftrightarrow |f(z)-2i|1 = 5 \Leftrightarrow |f(z)-2i| = 5$
Άρα ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι ο κύκλος με κέντρο Κ(0,2), ακτίνα ρ=5 και εξίσωση: $\chi^2 + (\psi-2)^2 = 25$

ΘΕΜΑ 2^Ο

i. Η f είναι συνεχής στο 0 , οπότε πρέπει να ισχύει:
$\lim\limits_{\chi\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$
Όμως :
• $\lim\limits_{f\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (|z+2| \cdot x + 2) = 2$
• $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (|z| \cdot \ln(x+e) - 2) = |z| - 2$
• $f(0) = 2$

Άρα πρέπει $|z| - 2 = 2 \Leftrightarrow |z| = 4$

ii. Έστω $z = \chi + \psi i$, $\chi, \psi \in R$. Τότε από (α) είναι $|z| = 4 \Leftrightarrow x^2 + \psi^2 = 16$

Και $z + \frac{1}{z} = x + \psi i + \frac{1}{x+\psi i} = x + \psi i + \frac{x-\psi i}{x^2+\psi^2} = x + \psi i + \frac{x-\psi i}{16}$

$x + \psi i + \frac{x}{16} - \frac{\psi}{16} i = \frac{17}{16} x + \frac{15}{16} \psi i$

Οπότε $Re\left(z + \frac{1}{z}\right) = \frac{17}{16} Im(z) \Leftrightarrow \frac{17}{16} x = \frac{17}{16} \psi \Leftrightarrow \psi = x$

Συνεπώς οι ζητούμενοι μιγαδικοί z έχουν εικόνες τα σημεία με συντεταγμένες που προκύπτουν από το σύστημα:

$\begin{cases} \chi^2 + \psi^2 = 16 \\ \psi = \chi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\chi^2 = 16 \\ \psi = \chi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi^2 = 8 \\ \psi = \chi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi = \pm 2\sqrt{2} \\ \psi = \chi \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \chi = 2\sqrt{2} \\ \psi = 2\sqrt{2} \end{cases}$ ή $\begin{cases} \chi = -2\sqrt{2} \\ \psi = -2\sqrt{2} \end{cases}$

Άρα οι ζητούμενοι μιγαδικοί είναι οι:

$z_1 = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} \cdot i \quad \kappa\alpha\iota \quad z_2 = -2\sqrt{2} - 2\sqrt{2} \cdot i$

iii. $\omega = \frac{2z+8}{z+2} \Leftrightarrow \omega(z+2) = 2z + 8 \Leftrightarrow \omega z + 2\omega = 2z + 8$

$\Leftrightarrow (\omega - 2)z = 8 - 2\omega$

Οπότε $|(\omega - 2)z| = |8 - 2\omega| \Leftrightarrow |\omega - 2| \cdot |z| = |8 - 2\omega|$

$\Leftrightarrow 4|\omega - 2| = |2\omega - 8|$

$\Leftrightarrow 4|\omega - 2| = 2|\omega - 4| \Leftrightarrow 2|\omega - 2| = |\omega - 4| \Leftrightarrow 4|\omega - 2|^2 = |\omega - 4|^2$

$\Leftrightarrow 4(\omega - 2)(\overline{\omega} - 2) = (\omega - 4)(\overline{\omega} - 4) \Leftrightarrow 4\omega\overline{\omega} - 8\omega - 8\overline{\omega} + 16 =$

$= \omega\overline{\omega} - 4\omega - 4\overline{\omega} + 16 \Leftrightarrow 3\omega\overline{\omega} - 4\omega - 4\overline{\omega} = 0 \Leftrightarrow 3|\omega|^2 - 4(\omega + \overline{\omega}) = 0$

$\Leftrightarrow 3|\omega|^2 - 4 \cdot 2Re(\omega) = 0 \Leftrightarrow 3|\omega|^2 - 8Re(\omega) = 0 \quad (1)$

Έστω $\omega = \chi + \psi i, \chi, \psi, \in R$. $\;Τότε$:

(1) $\Leftrightarrow 3(\chi^2 + \psi^2) - 8 \cdot \chi = 0 \Leftrightarrow \chi^2 + \psi^2 - \frac{8}{3}\chi = 0$

$\Leftrightarrow \chi^2 - \frac{8}{3}\chi + \frac{16}{\psi} + \psi^2 = \frac{16}{9}$

$\Leftrightarrow (\chi - \frac{4}{3})^2 + \psi^2 = \frac{16}{9}$

Αρα ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι ο κύκλος με κέντρο $K\left(\frac{4}{3}, 0\right)$ και ακτίνα $\rho = \frac{4}{3}$

iv. • Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [-1,0]

• $f(-1) = -|z + 2| + 2 \leq 0$, αφού

$|z + 2| \geq \left||z| - |2|\right| = |4 - 2| = 2$

• $f(0) = 2 > 0$

- Αν $f(-1) < 0$, τότε από το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $\chi_0 \in (-1, 0)$, $\text{τέτοιο ώστε}\ f(x_0) = 0$
- Αν $f(-1) = 0, \text{τότε το}\ \chi_0 = -1$ είναι ρίζα της f(x)=0.

Οπότε σε κάθε περίπτωση υπάρχει ένα τουλάχιστον $\chi_0 \in [-1,0), \text{τέτοιο ώστε}\ f(x_0) = 0$

Όμως η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο [-1,0]

(αφού $|z + 2| > 0$), άρα το χ_0 είναι μοναδικό.