ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟ ΘΕΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ

Θεώρημα DARBOUX

Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο [α,β] και $f'(\alpha) \neq f'(\beta)$. Για κάθε πραγματικό αριθμό κ μεταξύ των $f'(\alpha)$ και $f'(\beta)$ θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\chi_1 \in (\alpha, \beta)$ *τέτοιο ώστε* $f'(x_1) = \kappa$.

Απόδειξη

Έστω $f'(\alpha) < \kappa < f'(\beta)$. *Θεωρούμε την* $g(x) = f(x) - \kappa\chi$ *στο* $[\alpha, \beta]$.

Τότε $g'(x) = f'(x) - \kappa$. Άρα $g'(\alpha) = f'(\alpha) - \kappa < 0$.

$g'(\beta) = f'(\beta) - \kappa > 0$

Όμως

$$g'(\alpha) = \lim_{x \to \alpha^+} \frac{g(x) - g(\alpha)}{\chi - \alpha}$$

και

$$g'(\beta) = \lim_{\chi \to \beta^-} \frac{g(x) - g(\beta)}{\chi - \beta}$$

Οπότε θα υπάρχει $\delta_1 > 0$ *τέτοιος ώστε* $g(x) - g(\alpha) < 0$

$\Leftrightarrow\ g(x) < g(\alpha)$ *για κάθε* $\chi \in (\alpha, \alpha + \delta_1)$ *(1)*

και $\delta_2 > 0$ *τέτοιος ώστε*

$g(x) - g(\beta) < 0 \Leftrightarrow g(x) < g(\beta)$ *για κάθε* $\chi \in (\beta - \delta_2, \beta)$ (2)

Αφού g: παραγωγίσιμη στο [α,β] θα είναι και συνεχής στο [α,β] άρα λόγω μέγιστης-ελάχιστης τιμής θα υπάρχουν $\chi_1, \chi_2 \in [\alpha, \beta]$: $g(x_1) = m$, $g(x_2) = M$ *με* $m \leq g(x) \leq M$ *για κάθε* $\chi \in [\alpha, \beta]$.

Τα χ_1, χ_2 θα πρέπει να είναι εσωτερικά σημεία του (α,β)

διότι αν π.χ.: $\chi_1 = \alpha$ *τότε*

$$\left.\begin{array}{r} g(x_1) \leq g(x) \\ \text{και } g(x) < g(\alpha) \end{array}\right. \Rightarrow g(x_1) < g(\alpha) \qquad \text{άτοπο}$$

Τηλ./Fax.:210-6219712, Τηλ:210-6218894 www.apolito.gr – e-mail:info@apolito.gr
Λεωφόρος Μαραθώνος & Χρυσοστόμου Σμύρνης 3, 14565 Άγιος Στέφανος

Επίσης αν $\chi_1 = \beta$

$$\underset{g(x)<g(\beta)}{\overset{g(x_1)\leq g(x)}{\Rightarrow}} g(x_1) < g(\beta) \quad \text{άτοπο}$$

Ομοίως δουλεύουμε και για το χ_2.

Άρα g: $συνεχής\ [\alpha,\beta]$

g: $παραγωγίσιμη\ (\alpha,\beta)$

Και παρουσιάζει στο χ_1 ακρότατο (και στο χ_2) άρα λόγω του θεωρήματος Fermat :

$g'(x_1) = 0 \Leftrightarrow f'(x_1) - \kappa = 0 \Leftrightarrow f'(x_1) = \kappa$

<u>Παρατήρηση</u>

Λόγω του θεωρήματος Darboux βγαίνει το συμπέρασμα ότι η f' παίρνει όλες τις τιμές μεταξύ των $f'(\alpha) και\ f'(\beta)$ χωρίς να είναι απαραίτητη προϋπόθεση η συνέχεια της f'.

<u>Εφαρμογή</u>

1. Δίνεται συνάρτηση f' ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta] με\ f'(x) \neq 0\ για\ κάθε\ \chi \in [\alpha,\beta]$.
   Να αποδείξετε ότι η f' διατηρεί σταθερό πρόσημο στο [α,β]

<u>Απόδειξη</u>

Έστω ότι η f' δε διατηρεί σταθερό πρόσημο στο [α,β]. Τότε θα υπάρχουν $\chi_1, \chi_2 \in [\alpha,\beta]\ με\ f'(x_1) > 0\ και\ f'(x_2) < 0$.

Άρα λόγω του θεωρήματος Darboux η f' θα παίρνει οποιαδήποτε τιμή μεταξύ των $f'(x_1)\ και\ f'(x_2)$

Άρα και τη μηδενική άρα άτοπο.

2. Αν επιπλέον $f(\alpha) < f(\beta)$ να δείξετε ότι το σύνολο τιμών είναι το $[f(\alpha), f(\beta)]$.

   <u>Απόδειξη</u>

   Λόγω (α) $f'(x) > 0\ στο\ [\alpha,\beta]$ ή $f'(\chi) < 0\ στο\ [\alpha,\beta]$
   Αν
   $f'(x) > 0\ τότε\ f \uparrow$
   $στο\ [\alpha,\beta] άρα\ το\ σύνολο\ τιμών\ θα\ είναι\ το\ [f(\alpha), f(\beta)]$
   Αν $f'(\chi) < 0\ τότε\ f \downarrow\ στο\ [\alpha,\beta]\ άρα\ f(\alpha) > f(\beta)\ άτοπο.$

Αριθμητικό παράδειγμα

Έστω $f(x) = x^3 + x \;\; στο \; [0,1]$

Τότε $f'(x) = 3x^2 + 1 \neq 0 \;\; στο \; [0,1]$

$f(0) = 0, \quad f(1) = 2 \quad ά\rho\alpha \;\; f(0) < f(1)$

Άρα το σύνολο τιμών θα είναι το[0,2]

Τηλ./Fax.:210-6219712, Τηλ:210-6218894 www.apolito.gr – e-mail:info@apolito.gr
Λεωφόρος Μαραθώνος & Χρυσοστόμου Σμύρνης 3, 14565 Άγιος Στέφανος