ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ

Ένα Απλό- Σύνθετο Σωστό- Λάθος

Α. Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f, g : \ R \to R$

Για τις οποίες ισχύει $f(x)\cdot g(x)=0 \ για \ κάθε \ \chi \in R$.

Τότε $f(x)=0 \ για \ κάθε \ \chi\in R$ ή $g(x)=0 \ για \ κάθε \ \chi \in R$;

Απάντηση: Προφανώς η απάντηση είναι ΛΑΘΟΣ.

Ως παράδειγμα θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε τις συναρτήσεις

$$f(x)=\begin{cases}0, & x>0\\ x, & x\le 0\end{cases} \quad g(x)=\begin{cases}x^2+x, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

Προφανώς $f(x)\cdot g(x)=0 \ για \ κάθε \ \chi\in R$ με τις f, g μη μηδενικές στο R.

Σχόλιο: Αυτό που θα μπορούσαμε να συμπεράνουμε από τη σχέση $f(x)\cdot g(x)=0$

Θα ήταν $f(x)=0$ σε κάποια υποσύνολα του R

και $g(x)=0$ στα συμπληρωματικά υποσύνολα του R (και όχι μόνο)

Β. Αν οι συνεχείς συναρτήσεις $f, g : R \to R$ ικανοποιούσαν τη σχέση

$(f(x)-2)(g(x)-3)=0$ για κάθε $\chi\in R$ τότε θα μπορούσαμε να συμπεράνουμε ότι $f(x)=2 \ για \ κάθε \ \chi \in R$ ή $g(x)=3 \ για \ κάθε \ \chi\in R$;

Απάντηση: Προφανώς η απάντηση είναι ΛΑΘΟΣ.

Ως παράδειγμα θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε τις συναρτήσεις

$$f(x)=\begin{cases}2, & x>0\\ x+2, & x\le 0\end{cases} \quad g(x)=\begin{cases}x^2+x+3, & x>0\\ 3, & x\le 0\end{cases}$$

Προφανώς $(f(x)-2)(g(x)-3)=0 \ για \ κάθε \ \chi \in R$ με τις $f(x)-2, \ g(x)-3$ μη μηδενικές στο R.

Σχόλιο: Αυτό που θα μπορούσαμε να πούμε είναι ότι $f(x)=2$ σε κάποια υποσύνολα του R και $g(x)=3$ στα συμπληρωματικά υποσύνολα του R (και όχι μόνο)

Τηλ./Fax.:210-6219712, Τηλ:210-6218894 www.apolito.gr – e-mail:info@apolito.gr
Λεωφόρος Μαραθώνος & Χρυσοστόμου Σμύρνης 3, 14565 Άγιος Στέφανος

Γ. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: R \to R$ $με$ $(f(x)-2)(f(x)-3)=0$

Τότε $f(x)=2$ $για\ κάθε\ \chi \in R$ ή $f(x)=3$ $για\ κάθε\ \chi \in R$;

Απάντηση Προφανώς η απάντηση είναι ΣΩΣΤΟ

1ος τρόπος: Έστω ότι υπήρχαν $\chi_1, \chi_2 \in R\ με\ \chi_1 \neq \chi_2\ τέτοια\ ώστε$

$f(x_1)=2\ \ και\ f(x_2)=3$

Αν θεωρήσουμε την $f\ στο\ [\chi_1,\chi_2]$ ή $[\chi_2,\chi_1]$ και εφαρμόσουμε θεώρημα ενδιαμέσων τιμών θα υπάρχει $\chi_0 \in (\chi_1,\chi_2)$ή $(\chi_2,\ \chi_1)\ τέτοιο\ ώστε\ f(x_0)=n$, όπου n οποιοσδήποτε αριθμός μεταξύ του 2 και του 3. Π.χ.:
$f(x_0)=2{,}7\ \ πράγμα\ που\ είναι\ άτοπο\ διότι\ \ (2{,}7-2)(2{,}7-3)\neq 0$

2ος τρόπος: $(f(x)-2)(f(x)-3)=0 \Leftrightarrow$

$$f^2(x)-5f(x)+6=0 \Leftrightarrow f^2(x)-5f(x)+\left(\frac{5}{2}\right)^2=\left(\frac{5}{2}\right)^2-6$$

$$\Leftrightarrow (f(x)-\tfrac{5}{2})^2=\tfrac{25}{4}-\tfrac{24}{4} \Leftrightarrow \left(f(x)-\tfrac{5}{2}\right)^2=\tfrac{1}{4} \quad (1)$$

Θέτω $f(x)-\frac{5}{2}=g(x)$

(1)$\Rightarrow$ $g^2(x)=\frac{1}{4} \Leftrightarrow |g(x)|=\frac{1}{2}$ (2)

Προφανώς $g(x)\neq 0\ \ άρα\ η\ g\ διατηρεί\ σταθερό\ πρόσημο\ στο\ R$.

(I) $g(x)>0\ \ τότε\ \ (2) \to g(x)=\frac{1}{2} \to f(x)-\frac{5}{2}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow f(x)=3\ \ για\ κάθε\ \chi \in R.$

(II)$g(x)<0\ \ \ τότε\ (2) \to -g(x)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow\ -f(x)+\frac{5}{2}=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow f(x)=2\ \ για\ κάθε\ \chi \in R.$

ΤΕΛΙΚΟ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ: Προσοχή στις συναρτησιακές σχέσεις της μορφής

$A(x)\cdot B(x)=0$