ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΑΛΓΕΒΡΑΣ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1^{O}

Α.1. Έστω η πολυωνυμική εξίσωση $\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0$ με ακέραιους συντελεστές. Αν ο ακέραιος $\rho \neq 0$ είναι ρίζα της εξίσωσης, να αποδείξετε ότι ο ρ είναι διαιρέτης του σταθερού όρου α_0.

(Μονάδες 6,5)

Α.2. Να γράψετε στο τετράδιο σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.
Έστω πολυώνυμο $P(x)$ και ρ ένας πραγματικός αριθμός. Αν το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-\rho$ και $\pi(x)$ είναι το πηλίκο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x-\rho$, τότε:

Α. $P(x) = (x-\rho)\pi(x) + 1$
Β. $\pi(x) = (x-\rho)P(x)$
Γ. ο βαθμός του υπολοίπου της διαίρεσης του $P(x)$ με το $(x-\rho)$ είναι ίσος με μηδέν
Δ. $P(\rho) = 0$

(Μονάδες 6)

Β.1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν , γράφοντας στο τετράδιο σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Η εξίσωση $3x^3 - 5x + 6 = 0$ έχει ρίζα το 4.
β. Η εξίσωση $4x^4 + 5x^2 + 7x + 4 = 0$ έχει ρίζα το 2.
γ. Η εξίσωση $6x^6 - 3x^3 + 2x^2 - x + 2 = 0$ έχει ρίζα το -3.

(Μονάδες 6)

Β.2. Να γράψετε στο τετράδιο σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.
Το πολυώνυμο $P(x) = (4x+5)^{2004} + x^{2001}$ έχει παράγοντα το:

Α. $x+1$ Β. $x-1$ Γ. x Δ. $x+\frac{4}{5}$

(Μονάδες 6,5)

ΘΕΜΑ 2^{O}

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + ax + \beta$ όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

i. Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $(x+1)^2$ να αποδείξετε ότι $\alpha = -3$ και $\beta = -2$

(Μονάδες 11)

ii. Για τις τιμές των α, β του πρώτου ερωτήματος να γράψετε το $P(x)$ σε γινόμενο παραγόντων και στην συνέχεια να λύσετε την εξίσωση $P(x) + 8 = 2x^2$.

(Μονάδες 14)

ΘΕΜΑ 3^{O}

Δίνεται πολυώνυμο $P(x) = x^4 - 8x^3 + (5\alpha - 1)x^2 + 8x - 3\alpha - 6$

α. Να κάνετε την διαίρεση του $P(x)$ δια του $x^2 - 1$ και να γράψετε την σχετική ταυτότητα.

(Μονάδες 9)

β. Να βρείτε την τιμή του α , ώστε η παραπάνω διαίρεση να είναι τέλεια.

(Μονάδες 4)

γ. Για α=3 να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $P(x) = 0$ καθώς και τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ είναι κάτω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 4^{Ο}

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)$ για το οποίο γνωρίζουμε ότι έχει ρίζα το -2 και το υπόλοιπο της διαίρεσης του με το $x-1$ είναι ίσο με 6.

α. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το τριώνυμο x^2+x-2.

(Μονάδες 11)

β. Αν το πηλίκο της διαίρεσης του $P(x)$: (x^2+x-2) είναι το x^2+2 να λυθεί:

i) η εξίσωση $P(x)=0$

ii) η ανίσωση $P(x)>0$

(Μονάδες 14)

Καλή Επιτυχία.

<u>ΟΙ ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ ΚΑΘΩΣ ΚΑΙ ΟΙ ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ ΘΑ ΒΡΙΣΚΟΝΤΑΙ ΣΤΗΝ ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΤΟΥ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟΥ ΜΑΣ</u>

www.apolito.gr

ΘΕΜΑ 1ο
Α.1. Θεωρία σχολικού
Α.2. Δ
Β.1. α.Λ β.Λ γ.Λ
Β.2. Α

ΘΕΜΑ 2Ο
i.

$$\begin{array}{ccc|c|c}
1 & 0 & \alpha & \beta & -1 \\
 & -1 & 1 & -\alpha-1 & \\
\hline
1 & -1 & \alpha+1 & \beta-\alpha-1 &
\end{array}$$

Πρέπει : $\beta-\alpha-1=0$ τότε
$P(x)=(x+1)\cdot(x^2-x+a+1)$
όπου $\pi(x)=x^2-x+\alpha+1$ το πηλίκο της παραπάνω διαίρεσης.
Τότε πρέπει : $\pi(-1)=0 \Leftrightarrow 1+1+\alpha+1=0 \Leftrightarrow \alpha=-3$
και $\beta-(-3)-1=0 \Leftrightarrow \beta=-2$.

ii) Έχω ότι : $P(x)=x^3-3x-2$ τότε
$x^3-3x-2+8=2x^2 \Leftrightarrow x^3-2x^2-3x+6=0$

$$\begin{array}{ccc|c|c}
1 & -2 & -3 & 6 & 2 \\
 & 2 & 0 & -6 & \\
\hline
1 & 0 & -3 & 0 &
\end{array}$$

τότε $(x-2)\cdot(x^2-3)=0 \Leftrightarrow x-2=0$ ή $x^2-3=0 \Leftrightarrow x=2$ ή $x=\pm\sqrt{3}$.

ΘΕΜΑ 3Ο
α. $x^2-1=(x-1)(x+1)$

$$\begin{array}{l|l}
x^4-8x^3+(5a-1)x^2+8x-3a-6 & x^2-1 \\
\cline{2-2}
-x^4 \qquad + \qquad x^2 & x^2-8x+5a \\
\cline{1-1}
\quad -8x^3+5ax^2+8x-3a-6 & \\
\quad +8x^3 \qquad\qquad -8x & \\
\cline{1-1}
\qquad 5ax^2 \qquad -3a-6 & \\
\qquad -5ax^2 \qquad +5a & \\
\cline{1-1}
\qquad\qquad 2a-6 &
\end{array}$$

τότε $P(x)=(x^2-1)\cdot(x^2-8x+5a)+2a-6$

β. Πρέπει $2\alpha - 6 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 3$

γ. Τότε $P(x) = (x^2 - 1) \cdot (x^2 - 8x + 15)$

$P(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0$ ή $x^2 - 8x + 15 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$ ή $x = \frac{8 \pm 2}{2}$

$\Leftrightarrow x = \pm 1$ ή $x = 5$ ή $x = 3$

x	$-\infty$		-1		1		3		5		$+\infty$
$x^2 - 1$		+	0	-	0	+		+		+	
$x^2 - 8x + 15$		+		+		+	0	-	0	+	
$P(x)$		+	0	-	0	+	0	-	0	+	

Άρα $P(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-1,1) \cup (3,5)$

ΘΕΜΑ 4^{O}

α. Αφού βαθμ $(x^2 + x - 2) = 2$ τότε $\upsilon(x) = \alpha x + \beta$

Από την ταυτότητα της διαίρεσης έχουμε:

$P(x) = (x^2 + x - 2) \cdot \pi(x) + \alpha x + \beta\ , x \in \mathbb{R}$ (1)

Για $x = -2$ η (1) δίνει: $P(-2) = 0 \cdot \pi(-2) + \alpha \cdot (-2) + \beta$

$\Leftrightarrow -2\alpha + \beta = 0 \Leftrightarrow \beta = 2\alpha \cdot (2)$

Για $x = 1$ η (1) δίνει : $P(1) = 0 \cdot \pi(1) + \alpha + \beta$

$\Leftrightarrow \alpha + \beta = 6 \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \alpha + 2\alpha = 6 \Leftrightarrow \alpha = 2$

τότε (2) δίνει $\beta = 4$

οπότε $\upsilon(x) = 2x + 4$

β. Από την (1) έχουμε : $P(x) = (x^2 + x - 2) \cdot (x^2 + 2) + 2x + 4$

$\Leftrightarrow P(x) = x^4 + 2x^2 + x^3 + 2x - 2x^2 - 4 + 2x + 4 = x^4 + x^3 + 4x$

i) $P(x) = 0 \Leftrightarrow x(x^3 + x^2 + 4) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ή $x^3 + x^2 + 4 = 0$

1	1	0	4	-2
	-2	2	-4	
1	-1	2	0	

οπότε $(x + 2) \cdot (x^2 - x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = -2$ ή $x^2 - x + 2 = 0$

$\Delta = -7 < 0$ αδύνατη

ii)

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
x		-		-	0	+	
$x + 2$		-	0	+		+	
$x^2 - x + 2$		+		+		+	
$P(x)$		+	0	-	0	+	

Άρα $P(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$