ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΑΛΓΕΒΡΑΣ Β΄ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. 1. Να δείξετε ότι ένα πολυώνυμο P(x) έχει παράγοντα το x-ρ αν και μόνο αν το ρ είναι ρίζα του P(x). 9 μονάδες

2. Να γράψετε το θεώρημα της ταυτότητας της διαίρεσης πολυωνύμων. 4 μονάδες

Β. Έστω ένα πολυώνυμο P(x) .

Από τις παρακάτω προτάσεις να βρείτε ποια είναι ψευδής.

1. Αν το x-ρ δεν είναι παράγοντας του P(x) τότε $P(\rho) \neq 0$.
2. Το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με το x-ρ είναι ίσον με P(ρ).
3. Το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με το πολυώνυμο δ(x) έχει βαθμό και είναι μικρότερος από το βαθμό του δ(x).

6 μονάδες

Γ. Έστω το πολυώνυμο P(x) με ακέραιους συντελεστές.

Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

1. Αν ο ακέραιος ρ είναι διαιρέτης του σταθερού όρου του P(x) ο ρ είναι ρίζα του P(x).
2. Αν ο ακέραιος ρ δεν είναι διαιρέτης του σταθερού όρου του P(x) τότε ο ρ δεν είναι ρίζα του P(x).
3. Το P(0) είναι πιθανή ακέραιη ρίζα του P(x).

6 μονάδες

ΘΕΜΑ 2ο

Α. Με τη βοήθεια του σχήματος Horner μόνο, να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 7x + 6$ διαιρείται με το πολυώνυμο $Q(x) = (x-1)(x+3)$ και να βρείτε το πηλίκο. 12 μονάδες

Β. Αν το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - \alpha x + \beta - 1$ έχει παράγοντα το $x^2 - 3x + 2$ να βρείτε τα α και β. 13 μονάδες

ΘΕΜΑ 3ο

Α. Να λυθεί η ανίσωση: $x^4 + x^3 \geq 3x^2 + 4x + 4$. 8 μονάδες

Β. Να λύσετε την εξίσωση :$(3x+1)^8 - 15(3x+1)^4 - 16 = 0$. 7 μονάδες

Γ. Να λυθεί η ανίσωση: $x^2 + \frac{3x^2-x-1}{x-1} - \frac{x^2-2}{x-x^2} > 0$. 10 μονάδες

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 - αx + β$.
Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x^2 - 4$ είναι $3x - 2$.

1. Να βρείτε τα α και β. 7 μονάδες
2. Να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης. 5 μονάδες
3. Να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης. 3 μονάδες
4. Να βρείτε τα διαστήματα του x που η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης P(x) βρίσκεται πάνω από την ευθεία ε:y=3x-2. 10 μονάδες

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΘΕΜΑΤΩΝ
ΜΠΑΤΖΑΚΑΣ ΜΙΧΑΛΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ 1ο

Α.
1. Βλέπε θεωρία σχολικού βιβλίου
2. Βλέπε θεωρία σχολικού βιβλίου

Β.
1. Σ
2. Σ
3. Λ

Γ.
1. Λ
2. Σ
3. Σ

ΘΕΜΑ 2ο

Α.
Για το P(x) και για ρ=1 έχουμε :

1	0	-7	6	ρ=1
↓	1	1	-6	
1	1	-6	0	

Οπότε $P(x) = (x-1)(x^2 + x - 6)$
Για το $\pi(x) = x^2 + x - 6$ και για ρ= -3 έχουμε:

1	1	-6	ρ=-3
↓	-3	6	
1	-2	0	

Οπότε π(x)=(x+3)(x-2).
Άρα έχουμε :
P(x)=(x-1)(x+3)(x-2).
Αυτό σημαίνει ότι το P(x) διαιρείται με το Q(x)=(x-1)(x+3) και το πηλίκο της διαίρεσης είναι το x-2.

Β.

Είναι : $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$.

Επειδή το $P(x)$ έχει παράγοντα $x^2 - 3x + 2$ θα έχει ως παράγοντες τα πολυώνυμα x-1 και x-2.

Οπότε :

- $P(1) = 0 \Leftrightarrow 1^3 - \alpha 1 + \beta - 1 = 0 \Leftrightarrow 1 - \alpha + \beta - 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta$ (1)
- $P(2) = 0 \Leftrightarrow 2^3 - \alpha 2 + \beta - 1 = 0 \Leftrightarrow 8 - 2\alpha + \beta - 1 = 0 \Leftrightarrow -2\alpha + \beta = -7$ (2)

Η σχέση (2) λόγω της (1) γράφεται : $-2\beta + \beta = -7 \Leftrightarrow -\beta = -7 \Leftrightarrow \beta = 7$

Οπότε είναι : α=β=7.

ΘΕΜΑ 3ο

Α.

Είναι : $x^4 + x^3 \geq 3x^2 + 4x + 4 \Leftrightarrow x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 4 \geq 0$ (1)

Οι πιθανές ακέραιες ρίζες του πολυωνύμου : $P(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 4$

είναι $\pm 1, \pm 2, \pm 4$.

Με το σχήμα Horner για ρ=2 έχουμε :

1	1	-3	-4	-4	ρ=2
↓	2	6	6	4	
1	3	3	2	0	

Άρα $P(x) = (x-2)(x^3 + 3x^2 + 3x + 2)$

Ομοίως για το πολυώνυμο $\pi(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$

Με το σχήμα του Horner για ρ=-2 έχουμε :

1	3	+3	2	ρ=-2
↓	-2	-2	-2	
1	1	1	0	

$\pi(x) = (x+2)(x^2 + x + 1)$

Επομένως $P(x) = (x-2)(x+2)(x^2 + x + 1)$ και η ανίσωση (1) γράφεται :

$(x-2)(x+2)(x^2 + x + 1) \geq 0$ (2)

Το τριώνυμο $x^2 + x + 1$ έχει διακρίνουσα $\Delta = -3 < 0$, οπότε δεν έχει ρίζες

και έχουμε το σχήμα.

$-\infty$		-2		2		$+\infty$
	+	0	-	0	+	

Άρα : $x \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

Τηλ./Fax: 210.62.19.712, Τηλ: 210.6218.894 www.apolito.gr – e-mail:info@apolito.gr
Λεωφόρος Μαραθώνος &Χρυσοστόμου Σμύρνης 3, **14565 ΑΓΙΟΣ ΣΤΕΦΑΝΟΣ**

Β.

Για να λύσουμε την εξίσωση $(3x+1)^8 - 15(3x+1)^4 - 16 = 0$ (1) θέτουμε :
$(3x+1)^4 = y$ (2)

Η (1) γράφεται λόγω της (2) :

$y^2 - 15y - 16 = 0 \Leftrightarrow y = -1$ ή $y = 16$

- Για y=-1 η (2) γίνεται: $(3x+1)^4 = -1$,που είναι αδύνατη.
- Για y=16 η (2) γίνεται : $(3x+1)^4 = 16 \Leftrightarrow 3x+1 = \pm\sqrt{16} \Leftrightarrow 3x+1 = \pm\sqrt[4]{2^4}$
  $\Leftrightarrow 3x+1 = \pm 2 \Leftrightarrow 3x+1 = 2$ ή $3x+1 = -2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$ ή $x = -1$.

Άρα το σύνολο λύσεων της εξίσωσης (1) είναι το : $\left\{-1, \frac{1}{3}\right\}$.

Γ.

Έχουμε:

Ε.Κ.Π.=x(x-1) Περιορισμοί : $x(x-1) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$ *και* $x \neq 1$

$$x^2 + \frac{3x^2 - x - 1}{x-1} - \frac{x^2-2}{x-x^2} > 0 \Leftrightarrow x^2 \frac{3x^2 - x - 1}{x-1} - \frac{x^2-2}{x(1-x)} > 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{3x^2 - x - 1}{x-1} + \frac{x^2-2}{x(x-1)} > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2x(x-1) + x(3x^2-x-1) + x^2 - 2}{x(x-1)} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^4 + 2x^3 - x - 2}{x(x-1)} > 0 \Leftrightarrow \frac{x^3(x+2) - (x+2)}{x(x-1)} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+2)(x^3-1)}{x(x-1)} > 0 \Leftrightarrow \frac{(x+2)(x-1)(x^2+x+1)}{x(x-1)} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+2)(x^2+x+1)}{x} > 0 \quad (1)$$

Επειδή το τριώνυμο $x^2 + x + 1$ έχει διακρίνουσα $\Delta = -3 < 0$ και συντελεστή το x^2 το $1 > 0$ *είναι*: $x^2 + x + 1 > 0$, *για κάθε* $x \in \mathbb{R}$.

$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
	+	0	-	Φ	+	Φ	+	

Άρα η (1) $\Leftrightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (0.1) \cup (1, +\infty)$.

ΘΕΜΑ 4^ο^

1. Από την ταυτότητα της διαίρεσης είναι:

$$2x^3 - \alpha x + \beta = (x^2-4)\pi(x) + 3x - 2 \quad (1)$$

- Για $x = 2$ η (1) γίνεται

$2 \cdot 2^3 - \alpha 2 + \beta = (2^2-4)\pi(2) + 3 \cdot 2 - 2 \Leftrightarrow -2\alpha + \beta = -12$

- Για $x = -2$ η (1) γίνεται

$2(-2)^3 - \alpha(-2) + \beta = [(-2)^2 - 4]\pi(-2) + 3(-2) - 2 \Leftrightarrow 2\alpha + \beta = 8$

Είναι : $\begin{cases} -2\alpha + \beta = -12 \\ 2\alpha + \beta = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\alpha + \beta = -12 \\ 2\beta = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 5 \\ \beta = -2 \end{cases}$

2. Για α=5 και β= -2 είναι

$P(x) = 2x^3 - 5x - 2$ κάνουμε τη διαίρεση $P(x): (x^2 - 4)$

Οπότε το πηλίκο είναι π(x)=2x

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 + 0x^2 - 5x - 2 & x^2 - 4 \\ \cline{2-2} -2x^3 \qquad\qquad 8x & 2x \\ \hline 3x-2 & \end{array}$$

3. Η ταυτότητα της διαίρεσης είναι : $P(x) = (x^2 - 4)2x + 3x - 2$

4. Τα διαστήματα του x που η γραφική παράσταση της συνάρτησης P(x) βρίσκεται πάνω από την ευθεία y=3x-2 είναι οι λύσεις της ανίσωσης

$P(x) > 3x - 2 \Leftrightarrow (x^2 - 4)2x + 3x - 2 > 3x - 2$

$\Leftrightarrow (x^2 - 4)2x > 0 \;\Leftrightarrow x(x - 2)(x + 2) > 0 \;\Leftrightarrow x \in (-2, 0) \cup (2, +\infty)$

$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
	-	0	+	0	-	0	+	

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ
ΜΠΑΤΖΑΚΑΣ ΜΙΧΑΛΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ