

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΑΛΓΕΒΡΑΣ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1^ο

- A.** 1. Να δείξετε ότι ένα πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-\rho$ αν και μόνο αν το ρ είναι ρίζα του $P(x)$. 9 μονάδες
 2. Να γράψετε το θεώρημα της ταυτότητας της διαίρεσης πολυωνύμων. 4 μονάδες

B. Έστω ένα πολυώνυμο $P(x)$.

Από τις παρακάτω προτάσεις να βρείτε ποια είναι ψευδής.

1. Αν το $x-\rho$ δεν είναι παράγοντας του $P(x)$ τότε $P(\rho) \neq 0$.
2. Το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x-\rho$ είναι ίσον με $P(\rho)$.
3. Το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το πολυώνυμο $\delta(x)$ έχει βαθμό και είναι μικρότερος από το βαθμό του $\delta(x)$.

6 μονάδες

Γ. Έστω το πολυώνυμο $P(x)$ με ακέραιους συντελεστές.

Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

1. Αν ο ακέραιος ρ είναι διαιρέτης του σταθερού όρου του $P(x)$ ο ρ είναι ρίζα του $P(x)$.
2. Αν ο ακέραιος ρ δεν είναι διαιρέτης του σταθερού όρου του $P(x)$ τότε ο ρ δεν είναι ρίζα του $P(x)$.
3. Το $P(0)$ είναι πιθανή ακέραιη ρίζα του $P(x)$.

6 μονάδες

ΘΕΜΑ 2^ο

A. Με τη βοήθεια του σχήματος Horner μόνο, να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 7x + 6$ διαιρείται με το πολυώνυμο $Q(x) = (x-1)(x+3)$ και να βρείτε το πηλίκο. 12 μονάδες

B. Αν το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - ax + \beta - 1$ έχει παράγοντα το $x^2 - 3x + 2$ να βρείτε τα a και β . 13 μονάδες

ΘΕΜΑ 3^ο

A. Να λυθεί η ανίσωση: $x^4 + x^3 \geq 3x^2 + 4x + 4$. 8 μονάδες

B. Να λύσετε την εξίσωση: $(3x+1)^8 - 15(3x+1)^4 - 16 = 0$. 7 μονάδες

Γ. Να λυθεί η ανίσωση: $x^2 + \frac{3x^2-x-1}{x-1} - \frac{x^2-2}{x-x^2} > 0$. 10 μονάδες

ΘΕΜΑ 4^ο

Έστω το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 - ax + \beta$.

Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x^2 - 4$ είναι $3x - 2$.

1. Να βρείτε τα α και β . 7 μονάδες
2. Να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης. 5 μονάδες
3. Να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης. 3 μονάδες
4. Να βρείτε τα διαστήματα του x που η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ βρίσκεται πάνω από την ευθεία $\epsilon: y=3x-2$. 10 μονάδες

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΘΕΜΑΤΩΝ
ΜΠΑΤΖΑΚΑΣ ΜΙΧΑΛΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ 1^ο

A.

1. Βλέπε θεωρία σχολικού βιβλίου
2. Βλέπε θεωρία σχολικού βιβλίου

B.

1. Σ
2. Σ
3. Λ

Γ.

1. Λ
2. Σ
3. Σ

ΘΕΜΑ 2^ο

A.

Για το $P(x)$ και για $\rho=1$ έχουμε :

| | | | | |
|---|---|----|----|----------|
| 1 | 0 | -7 | 6 | $\rho=1$ |
| ↓ | 1 | 1 | -6 | |
| 1 | 1 | -6 | 0 | |

Οπότε $P(x) = (x - 1)(x^2 + x - 6)$

Για το $\pi(x) = x^2 + x - 6$ και για $\rho = -3$ έχουμε:

| | | | |
|---|----|----|-----------|
| 1 | 1 | -6 | $\rho=-3$ |
| ↓ | -3 | 6 | |
| 1 | -2 | 0 | |

Οπότε $\pi(x) = (x+3)(x-2)$.

Άρα έχουμε :

$P(x) = (x-1)(x+3)(x-2)$.

Αυτό σημαίνει ότι το $P(x)$ διαιρείται με το $Q(x) = (x-1)(x+3)$ και το πηλίκο της διαίρεσης είναι το $x-2$.

B.

Είναι : $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$.

Επειδή το $P(x)$ έχει παράγοντα $x^2 - 3x + 2$ θα έχει ως παράγοντες τα πολυώνυμα $x-1$ και $x-2$.

Οπότε :

- $P(1) = 0 \Leftrightarrow 1^3 - \alpha \cdot 1 + \beta - 1 = 0 \Leftrightarrow 1 - \alpha + \beta - 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta$ (1)

- $P(2) = 0 \Leftrightarrow 2^3 - \alpha \cdot 2 + \beta - 1 = 0 \Leftrightarrow 8 - 2\alpha + \beta - 1 = 0 \Leftrightarrow -2\alpha + \beta = -7$ (2)

Η σχέση (2) λόγω της (1) γράφεται : $-2\beta + \beta = -7 \Leftrightarrow -\beta = -7 \Leftrightarrow \beta = 7$

Οπότε είναι : $\alpha = \beta = 7$.

ΘΕΜΑ 3^ο

A.

Είναι : $x^4 + x^3 \geq 3x^2 + 4x + 4 \Leftrightarrow x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 4 \geq 0$ (1)

Οι πιθανές ακέραιες ρίζες του πολυωνύμου : $P(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 4$ είναι $\pm 1, \pm 2, \pm 4$.

Με το σχήμα Horner για $\rho=2$ έχουμε :

| | | | | | |
|---|---|----|----|----|----------|
| 1 | 1 | -3 | -4 | -4 | $\rho=2$ |
| ↓ | 2 | 6 | 6 | 4 | |
| 1 | 3 | 3 | 2 | 0 | |

Άρα $P(x) = (x - 2)(x^3 + 3x^2 + 3x + 2)$

Ομοίως για το πολυώνυμο $\pi(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$

Με το σχήμα του Horner για $\rho=-2$ έχουμε :

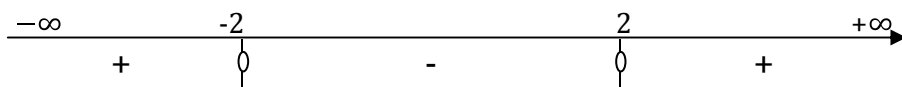
| | | | | |
|---|----|----|----|-----------|
| 1 | 3 | +3 | 2 | $\rho=-2$ |
| ↓ | -2 | -2 | -2 | |
| 1 | 1 | 1 | 0 | |

$\pi(x) = (x + 2)(x^2 + x + 1)$

Επομένως $P(x) = (x - 2)(x + 2)(x^2 + x + 1)$ και η ανίσωση (1) γράφεται :

$(x - 2)(x + 2)(x^2 + x + 1) \geq 0$ (2)

Το τριώνυμο $x^2 + x + 1$ έχει διακρίνουσα $\Delta = -3 < 0$, οπότε δεν έχει ρίζες και έχουμε το σχήμα.



Άρα : $x \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

Β.

Για να λύσουμε την εξίσωση $(3x + 1)^8 - 15(3x + 1)^4 - 16 = 0$ (1) θέτουμε :
 $(3x + 1)^4 = y$ (2)

Η (1) γράφεται λόγω της (2) :

$$y^2 - 15y - 16 = 0 \Leftrightarrow y = -1 \text{ ή } y = 16$$

- Για $y = -1$ η (2) γίνεται: $(3x + 1)^4 = -1$, που είναι αδύνατη.
- Για $y = 16$ η (2) γίνεται : $(3x + 1)^4 = 16 \Leftrightarrow 3x + 1 = \pm \sqrt[4]{16} \Leftrightarrow 3x + 1 = \pm 2$
 $\Leftrightarrow 3x + 1 = 2 \Leftrightarrow 3x + 1 = -2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$ ή $x = -1$.

Άρα το σύνολο λύσεων της εξίσωσης (1) είναι το : $\left\{-1, \frac{1}{3}\right\}$.

Γ.

Έχουμε:

Ε.Κ.Π. = $x(x-1)$ Περιορισμοί : $x(x-1) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$ και $x \neq 1$

$$x^2 + \frac{3x^2 - x - 1}{x - 1} - \frac{x^2 - 2}{x - x^2} > 0 \Leftrightarrow x^2 \frac{3x^2 - x - 1}{x - 1} - \frac{x^2 - 2}{x(1 - x)} > 0$$

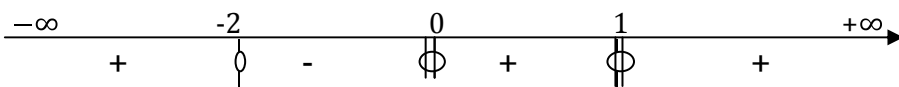
$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{3x^2 - x - 1}{x - 1} + \frac{x^2 - 2}{x(x - 1)} > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 x(x - 1) + x(3x^2 - x - 1) + x^2 - 2}{x(x - 1)} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^4 + 2x^3 - x - 2}{x(x - 1)} > 0 \Leftrightarrow \frac{x^3(x + 2) - (x + 2)}{x(x - 1)} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x + 2)(x^3 - 1)}{x(x - 1)} > 0 \Leftrightarrow \frac{(x + 2)(x - 1)(x^2 + x + 1)}{x(x - 1)} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x + 2)(x^2 + x + 1)}{x} > 0 \quad (1)$$

Επειδή το τριώνυμο $x^2 + x + 1$ έχει διακρίνουσα $\Delta = -3 < 0$ και συντελεστή το x^2 το $1 > 0$ είναι: $x^2 + x + 1 > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.



Άρα η (1) $\Leftrightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$.

ΘΕΜΑ 4^ο

1. Από την ταυτότητα της διαίρεσης είναι:

$$2x^3 - \alpha x + \beta = (x^2 - 4)\pi(x) + 3x - 2 \quad (1)$$

- Για $x = 2$ η (1) γίνεται

$$2 \cdot 2^3 - \alpha \cdot 2 + \beta = (2^2 - 4)\pi(2) + 3 \cdot 2 - 2 \Leftrightarrow -2\alpha + \beta = -12$$

- Για $x = -2$ η (1) γίνεται

$$2(-2)^3 - \alpha(-2) + \beta = [(-2)^2 - 4]\pi(-2) + 3(-2) - 2 \Leftrightarrow 2\alpha + \beta = 8$$

$$\text{Είναι: } \begin{cases} -2\alpha + \beta = -12 \\ 2\alpha + \beta = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\alpha + \beta = -12 \\ 2\beta = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 5 \\ \beta = -2 \end{cases}$$

2. Για $\alpha=5$ και $\beta=-2$ είναι

$$P(x) = 2x^3 - 5x - 2 \text{ κάνουμε τη διαίρεση } P(x):(x^2 - 4)$$

Οπότε το πηλίκο είναι $\pi(x)=2x$

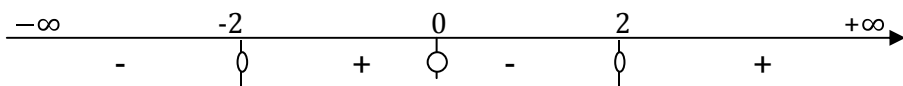
$$\begin{array}{r|l} 2x^3 + 0x^2 - 5x - 2 & x^2 - 4 \\ \hline -2x^3 & 2x \\ \hline & 8x - 2 \end{array}$$

3. Η ταυτότητα της διαίρεσης είναι : $P(x) = (x^2 - 4)2x + 3x - 2$

4. Τα διαστήματα του x που η γραφική παράσταση της συνάρτησης $P(x)$ βρίσκεται πάνω από την ευθεία $y=3x-2$ είναι οι λύσεις της ανίσωσης

$$P(x) > 3x - 2 \Leftrightarrow (x^2 - 4)2x + 3x - 2 > 3x - 2$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 4)2x > 0 \Leftrightarrow x(x - 2)(x + 2) > 0 \Leftrightarrow x \in (-2, 0) \cup (2, +\infty)$$



ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ
ΜΠΑΤΖΑΚΑΣ ΜΙΧΑΛΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ