

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1^ο

A1. Έστω x μια μεταβλητή που αφορά τα άτομα ενός πληθυσμού. Για ένα συγκεκριμένο δείγμα μεγέθους n , οι τιμές της μεταβλητής είναι x_i και οι αντίστοιχες συχνότητες v_i , με $v_i = 1, 2, 3, \dots, k$ όπου $k \leq n$. Να γράψετε ποιος αριθμός εκφράζει τη σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i και να αποδείξετε ότι $f_1 + f_2 + \dots + f_k = 1$.
(μονάδες 8,5)

A2. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

x_i	v_i	f_i	$f_i\%$
0	7		
1	8		
2	3		
3	22		
Σύνολο			

(μονάδες 4)

B1. Στον επόμενο πίνακα παρουσιάζεται ο αριθμός των σωστών απαντήσεων (x) σε ένα ερωτηματολόγιο 10 ερωτήσεων, στο οποίο έλαβαν μέρος 50 εξεταζόμενοι.

Σωστές απαντήσεις	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Αριθμός εξεταζόμενων	5	4	2	3	9	7	6	10	1	3

- Η μέση τιμή της κατανομής είναι:
α. 6,85 β. 4,85 γ. 5,58 δ. 7,58
- Η διάμεσος είναι:
α. 5 β. 6 γ. 7 δ. 4
- Η σχετική συχνότητα f_4 είναι:
α. 0,6 β. 0,03 γ. 0,3 δ. 0,06

(μονάδες 6)

B2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

- Διάμεσος (δ) ενός δείγματος n παρατηρήσεων οι οποίες έχουν διαταχθεί σε αύξουσα τάξη ορίζεται ως η μεσαία παρατήρηση, όταν ο n είναι περιττός.
- Η μέση τιμή ενός συνόλου n παρατηρήσεων είναι ένα μέτρο θέσης.
- Το άθροισμα όλων των σχετικών συχνοτήτων μιας κατανομής είναι ίσο με το μέγεθος n του δείγματος.
- Οι αθροιστικές σχετικές συχνότητες F_i μιας κατανομής εκφράζουν το ποσοστό των παρατηρήσεων που είναι μεγαλύτερες ή ίσες της τιμής x_i .

(μονάδες 4)

B3. Δίνονται δυο ομάδες τιμών που έχουν μέση τιμή 10.

A ομάδα: 0 5 8 10 12 15 20

B ομάδα: 0 8 9 10 11 12 20

Ποια ομάδα παρουσιάζει μεγαλύτερη διασπορά; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(μονάδες 2,5)

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 2$, $a, b, c \in \mathbb{R}$.

A. Να βρείτε τις τιμές των $a, b, c \in \mathbb{R}$, ώστε η f να έχει τοπικά ακρότατα στα σημεία με τετμημένες $x_1 = -1$ και $x_2 = 2$ και να ισχύει $f''(0) = 6$.

(μονάδες 10)

B. Να βρείτε τις τιμές και το είδος των ακρότατων.

(μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 3^ο

Οι βαθμοί δυο μαθητών A και B στα 5 διαγωνίσματα του μαθήματος 'Μαθηματικά και στοιχεία Στατιστικής' ήταν:

Βαθμοί μαθητή A: 20,25,50,75,80

Βαθμοί μαθητή B: 35,40,50,60,65

A. Να βρείτε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση της βαθμολογίας των δυο μαθητών.

(μονάδες 10)

B. Να βρείτε ποιου μαθητή οι βαθμολογίες παρουσιάζουν μεγαλύτερη ομοιογένεια.

(μονάδες 5)

Γ. Αν οι βαθμοί του A μαθητή ήταν μεγαλύτεροι κατά 20 βαθμούς ο καθένας, να βρείτε ποιου μαθητή οι βαθμολογίες έχουν τώρα τη μεγαλύτερη σχετική διασπορά.

(μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4^ο

Ρίχνουμε δυο ζάρια και έστω (α, β) το αποτέλεσμα της ρίψης και Ω ο δειγματικός χώρος του πειράματος. Επίσης θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^2 + ax + \beta$.

A. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 1$.

(μονάδες 5)

B. Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχόμενου A: 'η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 1$ διέρχεται από το σημείο $M(0,3)$ '.

(μονάδες 5)

Γ. Να βρείτε τα ακρότατα της f .

(μονάδες 5)



Δ. Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχόμενου Β: 'η συνάρτηση f παρουσιάζει (τοπικό) ελάχιστο στο $x_0 = -1$ και η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης είναι 3 ή 4'.
(μονάδες 5)

Ε. Να βρείτε την $P(A \cap B)$.
(μονάδες 5)

**ΟΙ ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ ΚΑΘΩΣ ΚΑΙ ΟΙ ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ ΘΑ
ΒΡΙΣΚΟΝΤΑΙ ΣΤΗΝ ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΤΟΥ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟΥ ΜΑΣ**

www.apolito.gr

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΘΕΜΑΤΩΝ
ΜΠΑΤΖΑΚΑΣ ΜΙΧΑΛΗΣ
ΠΕΤΡΟΠΟΥΛΟΣ ΓΙΑΝΝΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

A1. Θεωρία βλέπε σχολικό σελ.

A2.

x_i	v_i	f_i	$f_i\%$
0	7	0,175	17,5
1	8	0,2	20
2	3	0,075	7,5
3	22	0,55	55
Σύνολο	40	1	100

B1.

1.: γ

$$\text{Αφού } \bar{x} = \frac{1 \cdot 5 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 9 + 6 \cdot 7 + 7 \cdot 6 + 8 \cdot 10 + 9 \cdot 1 + 10 \cdot 3}{50} = \frac{279}{50} = 5.58$$

2.: β

$$\text{Αφού } \delta = \frac{25^n \text{ παρατήρηση} + 26^n \text{ παρατήρηση}}{2} = \frac{6+6}{2} = 6$$

3.: δ

$$\text{Αφού } f_4 = \frac{3}{50} = 0.06$$

B.2

α: Σωστό

β: Σωστό

γ: Λάθος

δ: Λάθος

B3. Μεγαλύτερη διασπορά παρουσιάζει η Α ομάδα, γιατί και οι δύο ομάδες έχουν μέση τιμή 10 και οι παρατηρήσεις της Α ομάδας παρουσιάζουν μεγαλύτερη μεταβλητότητα γύρω από την μέση τιμή.

ΘΕΜΑ 2^ο

A. Έχουμε ότι: $f'(x) = 3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma$ και $f''(x) = 6\alpha x + 2\beta$.

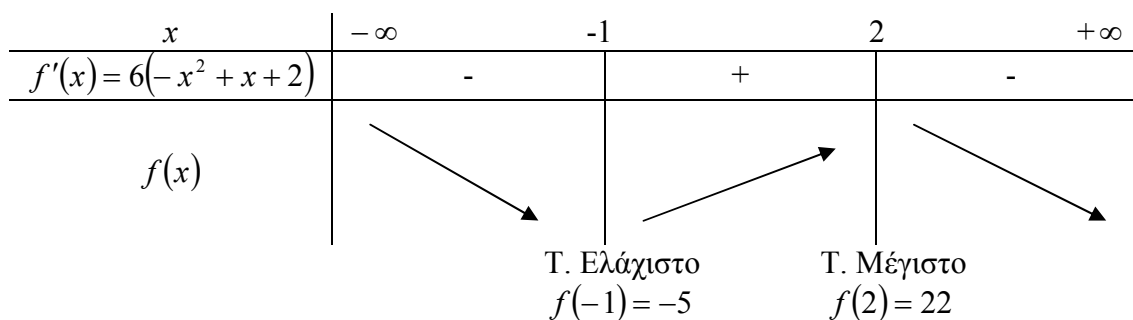
$$\text{ΠΡΕΠΕΙ: } \begin{cases} f'(-1) = 0 \\ f'(2) = 0 \\ f''(0) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\alpha - 2\beta + \gamma = 0 \\ 12\alpha + 4\beta + \gamma = 0 \\ 2\beta = 6 \end{cases}$$

$$\text{Άρα } \beta = \frac{6}{2} \Leftrightarrow \beta = 3 \text{ και } \begin{cases} 3\alpha - 6 + \gamma = 0 \\ 12\alpha + 12 + \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = 6 - 3\alpha \\ \gamma = -12 - 12\alpha \end{cases} \Leftrightarrow 6 - 3\alpha = -12 - 12\alpha$$

$$\Leftrightarrow 12\alpha - 3\alpha = -12 - 6 \Leftrightarrow \frac{9\alpha}{9} = -\frac{18}{9} \Leftrightarrow \alpha = -2 \text{ και } \gamma = 6 - 3 \cdot (-2) \Leftrightarrow \gamma = 12$$

B. Έχουμε ότι: $f'(x) = -6x^2 + 6x + 12 = 6(-x^2 + x + 2)$ και

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ή } x = -1$$



Άρα η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x = -1$ το $f(-1) = -5$ και τοπικό μέγιστο στο $x = 2$ το $f(2) = 22$.

ΘΕΜΑ 3^ο

$$A. \bar{x}_A = \frac{20 + 25 + 50 + 75 + 80}{5} = \frac{250}{5} = 50$$

$$S_A^2 = \frac{(20 - 50)^2 + (25 - 50)^2 + (50 - 50)^2 + (75 - 50)^2 + (80 - 50)^2}{5}$$

$$= \frac{900 + 625 + 0 + 625 + 900}{5} = \frac{3050}{5} = 610.$$

$$S_A = \sqrt{610} = \sqrt{6.1} \cdot 10 \text{ και}$$

$$\bar{x}_B = \frac{35 + 40 + 50 + 60 + 65}{5} = \frac{250}{5} = 50$$

$$S_B^2 = \frac{(35-50)^2 + (40-50)^2 + (50-50)^2 + (60-50)^2 + (65-50)^2}{5}$$

$$= \frac{225 + 100 + 0 + 100 + 225}{5} = \frac{650}{5} = 130.$$

$$S_B = \sqrt{130} = \sqrt{1.3 \cdot 10}.$$

$$B. CV_A = \frac{S_A}{\bar{x}_A} = \frac{\sqrt{6.1 \cdot 10}}{50} = \frac{\sqrt{6.1}}{5}$$

$$CV_B = \frac{S_B}{\bar{x}_B} = \frac{\sqrt{1.3 \cdot 10}}{50} = \frac{\sqrt{1.3}}{5}$$

Αφού $CV_B < CV_A$ οι βαθμολογίες του Β τμήματος παρουσιάζουν μεγαλύτερη ομοιογένεια.

$$Γ. Έχουμε ότι: $\bar{x}'_A = \bar{x}_A + 20 = 70$ $S'_A = S_A = \sqrt{6.1 \cdot 10}$$$

$$\text{οπότε } CV'_A = \frac{S'_A}{\bar{x}'_A} = \frac{\sqrt{6.1 \cdot 10}}{70} = \frac{\sqrt{6.1}}{7}.$$

$$\text{Αφού } CV'_A > CV_B \Leftrightarrow \frac{\sqrt{6.1}}{7} > \frac{\sqrt{1.3}}{5} \Leftrightarrow \frac{6.1}{49} > \frac{1.3}{25} \Leftrightarrow 61 \cdot 25 > 49 \cdot 13 \text{ ισχύει}$$

Άρα οι βαθμολογίες του Α τμήματος παρουσιάζουν μεγαλύτερη σχετική διασπορά.

ΘΕΜΑ 4^ο

Ο δειγματικός χώρος Ω του πειράματος είναι:

2 ^η ρίψη	1	2	3	4	5	6
1 ^η ρίψη						
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

$$A. f'(x) = 2x + \alpha \text{ οπότε } \lambda_{\text{εφ}} = f'(1) = 2 + \alpha \text{ και } f(1) = 1 + \alpha + \beta$$

άρα εφ: $y = (2 + \alpha)x + \kappa$ και για $x = 1$ και $y = 1 + \alpha + \beta$ έχουμε

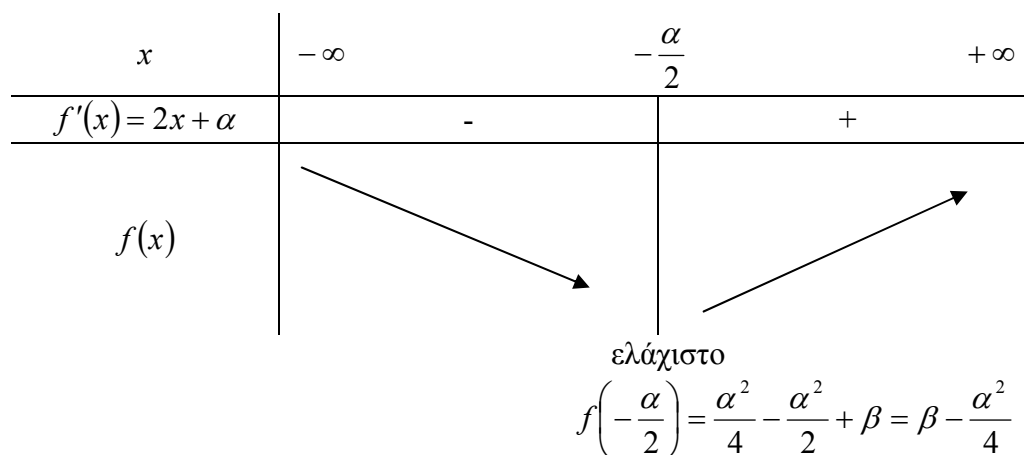
$$1 + \alpha + \beta = 2 + \alpha + \kappa \Leftrightarrow \kappa = \beta - 1 \text{ δηλαδή εφ: } y = (2 + \alpha) \cdot x + \beta - 1.$$

$$B. \text{ Για } x = 0 \text{ και } y = 3 \text{ έχουμε } 3 = (2 + \alpha) \cdot 0 + \beta - 1 \Leftrightarrow \beta = 4$$

άρα το ενδεχόμενο $A = \{(1,4), (2,4), (3,4), (4,4), (5,4), (6,4)\}$ οπότε

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Γ. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + \alpha = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\alpha}{2}$



Δ. Πρέπει $-\frac{\alpha}{2} = -1 \Leftrightarrow \alpha = 2$ και $\beta - \frac{\alpha^2}{4} = 3$ ή $\beta - \frac{\alpha^2}{4} = 4 \Leftrightarrow \beta = 4$ ή $\beta = 5$

άρα το ενδεχόμενο $B = \{(2,4), (2,5)\}$ οπότε $P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$.

Ε. Έχουμε ότι: $A \cap B = \{(2,4)\}$ και $P(A \cap B) = \frac{N(A \cap B)}{N(\Omega)} = \frac{1}{36}$.

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ
ΜΠΑΤΖΑΚΑΣ ΜΙΧΑΗΛΗΣ
ΠΕΤΡΟΠΟΥΛΟΣ ΓΙΑΝΝΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ