

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

16/12/2012

Θέμα 1^ο

A. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν ενός ορθογωνίου ισούται με το γινόμενο των πλευρών του.

Μονάδες 10

B. Να διατυπώσετε το θεώρημα Γενίκευσης του Πυθαγορείου Θεωρήματος για αμβλεία γωνία.

Μονάδες 5

Γ. Να χαρακτηρίσετε με την ένδειξη «ΣΩΣΤΟ» ή «ΛΑΘΟΣ», τις παρακάτω προτάσεις:

- i. Αν το τρίγωνο ABΓ είναι αμβλυγώνιο με $\hat{B} > 90^\circ$, τότε ισχύει $a^2 < b^2 + \gamma^2$.
- ii. Αν το τρίγωνο ABΓ είναι ορθογώνιο με $\hat{A} = 90^\circ$, τότε ισχύει $\beta^2 + \gamma^2 = 4\mu_a^2$.
- iii. Αν δύο χορδές AB, ΓΔ ενός κύκλου τέμνονται σε σημείο Σ εκτός του κύκλου, τότε ισχύει: $\Sigma A \cdot AB = \Sigma \Gamma \cdot \Gamma \Delta$.
- iv. Αν για το ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ ισχύει ότι $a < \beta < \gamma$, τότε $\text{AB}\Gamma = \frac{1}{2}\beta\gamma$.
- v. Δύο ίσα σχήματα είναι ισοδύναμα.

Μονάδες 2 x 5

Θέμα 2^ο

Δίνεται τρίγωνο ABΓ με AB = 8, ΒΓ = 7 και ΑΓ = 10.

- i. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι οξυγώνιο.
- ii. Να υπολογίσετε τη διάμεσο ΒΕ.
- iii. Αν ΑΔ ύψος, να αποδείξετε ότι $B\Delta = \frac{13}{14}$.

Μονάδες 10 + 8 + 7

Θέμα 3^ο

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με βάσεις $AB = 5 \text{ cm}$, $ΓΔ = 15 \text{ cm}$ και μη παράλληλες πλευρές ίσες με 13 cm .

- i. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τραπέζιου.
- ii. Να υπολογίσετε τη διαγώνιο ΑΓ.
- iii. Να υπολογίσετε την προβολή του ύψους ΑΕ πάνω στην διαγώνιο ΑΓ.

Μονάδες 10 + 8 + 7

Θέμα 4^ο

Δίνεται κύκλος (O,R) και δύο χορδές του ΒΓ, ΔΕ που τέμνονται στο Α, ώστε $AB = 3$, $ΑΓ = 4$ και $ΑΕ = 2\sqrt{3}$.

- i. Να αποδείξετε ότι $OA \perp ΔΕ$.
- ii. Αν $OA = 1$, να δείξετε ότι $\Delta_{(O,R)}^A = -12$.

Μονάδες 15 + 10

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

ΛΥΣΕΙΣ

Θέμα 1^ο

A. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 213.

B. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 190.

Γ. i. Σ

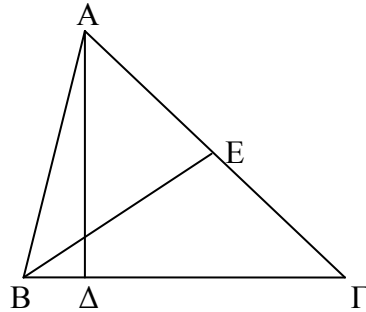
ii. Σ

iii. Λ

iv. Λ

v. Σ

Θέμα 2^ο



i. Είναι $\hat{B} > \hat{A}, \hat{\Gamma}$, αφού $A\Gamma > B\Gamma, AB$. Επίσης ισχύει $A\Gamma^2 = 100$ και $AB^2 + B\Gamma^2 = 113$, δηλαδή $A\Gamma^2 < AB^2 + B\Gamma^2$. Οπότε η γωνία B είναι οξεία και κατά συνέπεια το τρίγωνο είναι οξυγώνιο.

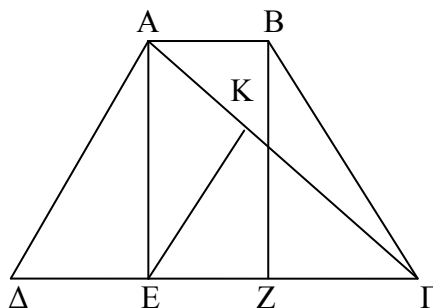
ii. Από το 1^ο θεώρημα διαμέσων στο τρίγωνο ABΓ έχουμε:

$$BA^2 + B\Gamma^2 = 2BE^2 + \frac{A\Gamma^2}{2} \Leftrightarrow BE = \sqrt{\frac{2BA^2 + 2B\Gamma^2 - A\Gamma^2}{4}} \Leftrightarrow BE = \frac{\sqrt{126}}{2}$$

iii. Η γωνία B είναι οξεία, οπότε από το γενικευμένο Πυθαγόρειο θεώρημα για την πλευρά AG έχουμε:

$$A\Gamma^2 = BA^2 + B\Gamma^2 - 2B\Gamma \cdot B\Delta \Leftrightarrow B\Delta = \frac{BA^2 + B\Gamma^2 - A\Gamma^2}{2B\Gamma} \Leftrightarrow B\Delta = \frac{13}{14}$$

Θέμα 3^ο



Φέρνουμε τα ύψη AE και BZ. Τότε $\triangle A\hat{A}E = \triangle B\hat{B}Z$ (γιατί;), οπότε $\Delta E = \Gamma Z$.

Επίσης το ABZE είναι ορθογώνιο (γιατί;), οπότε $EZ = AB = 5 \text{ cm}$ και κατά συνέπεια $\Delta E = \Gamma Z = 5 \text{ cm}$ (γιατί;).

Εφαρμόζουμε τώρα το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο AΔE και παίρνουμε:

$$A\Delta^2 = EA^2 + E\Delta^2 \Leftrightarrow EA = \sqrt{A\Delta^2 - E\Delta^2} \Leftrightarrow EA = 12 \text{ cm}$$

i. Έχουμε $AB\Gamma\Delta = \frac{AB + \Gamma\Delta \cdot AE}{2} \Leftrightarrow AB\Gamma\Delta = 120 \text{ cm}^2$.

ii. Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο AEΓ και παίρνουμε:

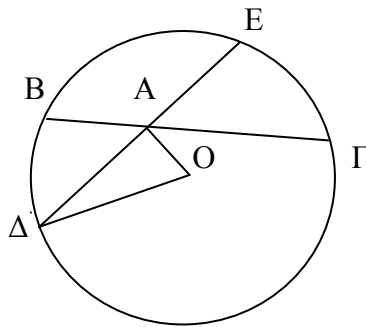
$$A\Gamma^2 = EA^2 + E\Gamma^2 \Leftrightarrow A\Gamma = \sqrt{EA^2 + E\Gamma^2} \Leftrightarrow A\Gamma = 2\sqrt{61} \text{ cm}$$

Σχόλιο: Για να υπολογίσουμε την AΓ μπορούμε να εφαρμόσουμε το γενικευμένο Πυθαγόρειο θεώρημα, είτε στο $\Delta A \hat{\Delta} \Gamma$ (οξείας γωνίας), είτε στο $\Delta A \hat{B} \Gamma$ (αμβλείας γωνίας).

iii. Στο ορθογώνιο τρίγωνο AΓE έχουμε:

$$EA^2 = A\Gamma \cdot AK \Leftrightarrow AK = \frac{EA^2}{A\Gamma} \Leftrightarrow AK = \frac{72\sqrt{61}}{61} \text{ cm}$$

Θέμα 4^ο



i. Για τις χορδές BΓ και ΔE που τέμνονται A, ισχύει :

$$AB \cdot A\Gamma = A\Delta \cdot AE \Leftrightarrow A\Delta = \frac{AB \cdot A\Gamma}{AE} \Leftrightarrow A\Delta = 2\sqrt{3},$$

δηλαδή $A\Delta = AE$.

Αφού το A είναι μέσο της ΔE, θα είναι $OA \perp \Delta E$ (OA: απόστημα).

ii. Το τρίγωνο OΑΔ είναι ορθογώνιο (από i), οπότε εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα και παίρνουμε:

$$O\Delta^2 = AO^2 + A\Delta^2 \Leftrightarrow R^2 = 13$$

$$\text{Συνεπώς } \Delta_{(O,R)}^A = OA^2 - R^2 \Leftrightarrow \Delta_{(O,R)}^A = -12.$$