



ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1^ο

- I. Να δοθεί ο ορισμός της γνησίως αύξουσας και της γνησίως φθίνουσας συνάρτησης στο διάστημα Δ . 7 μονάδες
- II. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται συνεχής στο $x_0 \in A$; 5 μονάδες
- III. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται παταγωγίσιμη στο $x_0 \in A$; 5 μονάδες
- IV. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ.
- i. Το $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ λέγεται παράγωγος της f στο x_0 .
- ii. Αν $f(x) = x^2$, τότε $f'(2) = 4$.
- iii. Αν $f(x) = x - 2$, τότε ο ρυθμός μεταβολής της f ως προς x όταν $x = 2001$ είναι 2003.
- iv. Αν η θέση ενός κινητού δίνεται από τη συνάρτηση $y = f(t)$, τότε η ταχύτητα του κινητού τη χρονική στιγμή t_0 είναι $v(t_0) = f'(t_0)$. 8 μονάδες

ΘΕΜΑ 2^ο

- A. Αν $f(x) = x^2 - 3x$, να αποδειχθεί ότι:
- i. $f(2 + h) - f(2) = h^2 + h$
- ii. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2 + h) - f(2)}{h} = 1$ 10 μονάδες
- B. Να βρεθούν τα όρια:
- i. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^3 + x + 2}$
- ii. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2-x} - 1}{x^2 + 2x - 3}$ 15 μονάδες



ΘΕΜΑ 3^ο

A. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 + 2x^3 - 12x^2 + 3$.

- Να βρεθεί η f' και η f'' .
- Να βρεθούν τα σημεία της $C_{f'}$ στα οποία η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.
- Να λυθεί η ανίσωση $f''(x) \leq 0$.

13 μονάδες

B. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + \lambda x + 2, \lambda \in \mathbb{R}$.

- Να βρεθεί το $f'(1)$.
- Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της A με τετμημένη $x_0 = 1$.
- Να βρεθούν οι τιμές του λ έτσι ώστε η παραπάνω εφαπτομένη να διέρχεται από το σημείο B(2,-3).

12 μονάδες

ΘΕΜΑ 4^ο

Ένα κινητό εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση. Η θέση του κινητού δίνεται από τη συνάρτηση $x = f(t) = 2t^3 - 3t^2 - 12t$, όπου $t \geq 0$ ο χρόνος σε s.

- Σε ποια θέση βρίσκεται το κινητό πριν αρχίσει να κινείται;
- Ποια είναι η ταχύτητα του κινητού τη χρονική στιγμή $t = 1s$;
- Να βρεθεί η (στιγμιαία) ταχύτητα την κάθε χρονική στιγμή t .
- Ποιες χρονικές στιγμές η ταχύτητα είναι ίση με μηδέν;
- Γνωρίζοντας ότι το σώμα κινείται προς τα δεξιά αν η ταχύτητά του είναι θετική και προς τα αριστερά αν η ταχύτητά του είναι αρνητική, να βρεθεί ποιο χρονικό διάστημα το σώμα κινείται προς τα αριστερά.
- Ποια είναι η μεγαλύτερη απομάκρυνση του κινητού προς τα αριστερά;
- Να βρεθεί το συνολικό διάστημα που διήνυσε το κινητό τα 3 πρώτα s της κίνησής του.

25 μονάδες

**ΟΙ ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ ΚΑΘΩΣ ΚΑΙ ΟΙ ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ ΘΑ
ΒΡΙΣΚΟΝΤΑΙ ΣΤΗΝ ΙΣΤΙΟΣΕΛΙΔΑ ΤΟΥ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟΥ ΜΑΣ**

www.apolito.gr

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΘΕΜΑΤΩΝ
ΜΠΑΤΖΑΚΑΣ ΜΙΧΑΛΗΣ
ΠΕΤΡΟΠΟΥΛΟΣ ΓΙΑΝΝΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

IV.

- i. Σωστό
- ii. Σωστό
- iii. Λάθος
- iv. Σωστό

ΘΕΜΑ 2^ο

$$\begin{aligned} \text{A.i) } f(2+h) - f(2) &= (2+h)^2 - 3(2+h) - (2^2 - 3 \cdot 2) \\ &= 4 + 4h + h^2 - 6 - 3h + 2 \\ &= h^2 + h \end{aligned}$$

$$\text{ii) } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h+1) = 1$$

$$\text{B.i) Για } x \neq -1 \text{ έχουμε } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^3 + x - 2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1) \cdot (x^2 - x + 1)}{(x+1) \cdot (x^2 - x + 2)} = \frac{1+1+1}{1+1+2} = \frac{3}{4}.$$

Σχήμα Horner

1	0	1	-2	-1
	-1	+1	2	
1	-1	2	0	

ii) Για $x \in (-\infty, -3) \cup (-3, 1) \cup (1, 2]$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{2-x}-1)(\sqrt{2-x}+1)}{(x^2+2x-3)(\sqrt{2-x}+1)} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2-x-1}{(x-1)(x+3) \cdot (\sqrt{2-x}+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x-1)}{(x-1) \cdot (x+3) \cdot (\sqrt{2-x}+1)} = \frac{-1}{(1+3) \cdot (\sqrt{1}+1)} = -\frac{1}{8} \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 3^ο

$$\begin{aligned} \text{A.i) } f'(x) &= (x^4 + 2x^3 - 12x^2 + 3)' = 4x^3 + 6x^2 - 24x \\ f''(x) &= (4x^3 + 6x^2 - 24x)' = 12x^2 + 12x - 24 \end{aligned}$$

ii) Πρέπει $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 12(x^2 + x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = -2$

Άρα τα σημεία της C_f στα οποία οι εφαπτομένες είναι παράλληλες στον $x'x$ είναι $(1, f'(1)) = (1, -14)$ και $(-2, f'(-2)) = (-2, 40)$.

iii) $f''(x) \leq 0 \Leftrightarrow 12(x^2 + x - 2) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-2, 1]$

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$12(x^2 + x - 2)$		+	-	+

B.i) $f'(x) = (x^2 + \lambda x + 2)' = 2x + \lambda$
 $f'(1) = 2 + \lambda$

ii) Η εξίσωση της ζητούμενης εφαπτομένης είναι:

$εφ: y = (2 + \lambda) \cdot x + \beta$ η οποία διέρχεται από το σημείο $(1, f(f)) = (1, 3 + \lambda)$
 οπότε $3 + \lambda = (2 + \lambda) \cdot 1 + \beta \Leftrightarrow \beta = 1$.

Άρα έχουμε την εξίσωση της εφαπτομένης $εφ: y = (2 + \lambda) \cdot x + 1$.

iii) Πρέπει $-3 = (2 + \lambda) \cdot 2 + 1 \Leftrightarrow -3 = 4 + 2\lambda + 1 \Leftrightarrow 2\lambda = -8 \Leftrightarrow \lambda = -4$.

ΘΕΜΑ 4^ο

i) Για $t = 0 \rightarrow f(0) = 0$

Άρα το κινητό βρίσκεται στην αρχή του άξονα.

ii) $v(t) = f'(t) = (2t^3 - 3t^2 - 12t)' = 6t^2 - 6t - 12$
 $v(1) = 6 - 6 - 12 = -12 \mu / \text{sec}$

iii) $v(t) = 6t^2 - 6t - 12$

iv) $v(t) = 0 \Leftrightarrow 6(t^2 - t - 2) = 0 \Leftrightarrow t = 2$ ή $t = -1 \rightarrow$ Απορρίπτεται

v)

t	0	2	$+\infty$
$v(t) = 6(t^2 - t - 2)$		-	+

Για $t \in [0, 2]$ το σώμα κινείται προς τα αριστερά.



vi) Η μεγαλύτερη απομάκρυνση του σώματος προς τα αριστερά είναι

$$f(2) = 2 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 = -20\mu$$

$$\text{vii) } S_{oz} = |f(2) - f(0)| + |f(3) - f(2)|$$

$$= |-20 - 0| + |2 \cdot 3^3 - 3 \cdot 3^2 - 12 \cdot 3 - (-20)|$$

$$= 20\mu + |-9 + 20|$$

$$= 20\mu + 11\mu = 31\mu$$

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ
ΜΠΑΤΖΑΚΑΣ ΜΙΧΑΛΗΣ
ΠΕΤΡΟΠΟΥΛΟΣ ΓΙΑΝΝΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ