

**ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ**

**ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>**

- I. A) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιο σας την ένδειξη Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ), δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση. Δίνονται τρεις ομάδες τιμών.

Ομάδα (I): 0 20 40 50 60 80 100

Ομάδα (II): 0 48 49 50 51 52 100

Ομάδα (III): 0 1 8 50 92 99 100

- α. Και οι τρεις ομάδες έχουν την ίδια διάμεσο.  
 β. Η ομάδα (III) έχει το μεγαλύτερο εύρος.  
 γ. Και οι τρεις ομάδες έχουν την ίδια μέση τιμή που είναι ίση με 45.  
 δ. Μεγαλύτερη διασπορά έχει η ομάδα (III).  
 ε. Μεγαλύτερη ομοιογένεια έχει η ομάδα (I).  
 στ. Μεγαλύτερο συντελεστή μεταβολής έχει η ομάδα (I).  
 ζ. Μικρότερη τυπική απόκλιση έχει η ομάδα (I).  
 η. Και οι τρεις ομάδες είναι 'συμμετρικές' ως προς την μέση τιμή.

B) Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στην σωστή απάντηση. Δίνεται ότι η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση των αριθμών  $x_1, x_2, \dots, x_n$  είναι αντίστοιχα 5 και 2.

- 1) Η μέση τιμή των  $-3x_1 - 2, -3x_2, \dots, -3x_n - 2$  είναι:  
 α. -5    β. -13    γ. 17    δ. -17
- 2) Η τυπική απόκλιση των  $-3x_1 - 2, -3x_2 - 2, \dots, -3x_n - 2$  είναι:  
 α. -8    β. -4    γ. 6    δ. -6
- 3) Η διακύμανση των  $-3x_1 - 2, -3x_2 - 2, \dots, -3x_n - 2$  είναι:  
 α. -12    β. 36    γ. 12    δ. 18

Π. Α) Να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της ερώτησης και δίπλα το γράμμα που αντιστοιχεί στην σωστή απάντηση.

1. Αν η διάμεσος  $\delta$  ενός δείγματος είναι ίση με το ημίαθροισμα της  $13^{\text{ης}}$  και  $14^{\text{ης}}$  παρατήρησης, τότε το πλήθος  $n$  είναι ίσο με:  
α. 13,5    β. 26    γ. 27    δ. 28
2. Όταν όλες οι τιμές  $x_i$  είναι ίσες με μια σταθερά  $c \in \mathfrak{R}$ , τότε η μέση τιμή  $\bar{x}$ , θα είναι ίση με:  
α. 0    β. 1    γ.  $n$     δ.  $c$
3. Όταν όλες οι τιμές  $x_i$  ενός δείγματος είναι ίσες με μια σταθερά  $c \in \mathfrak{R}$  τότε η τυπική απόκλιση  $s$  είναι ίση με:  
α. 0    β. 1    γ.  $n$     δ.  $c$

Β) Δίνονται δύο δείγματα:

Δείγμα I:	0	20	40	50	60	80	100
Δείγμα II:	0	48	49	50	51	52	100

1. Να βρείτε την μέση τιμή  $\bar{x}$ .
2. Ποιο από τα δύο δείγματα έχει την μεγαλύτερη διασπορά;
3. Ποιο από τα παραπάνω δείγματα παρουσιάζει την μικρότερη ανομοιογένεια;

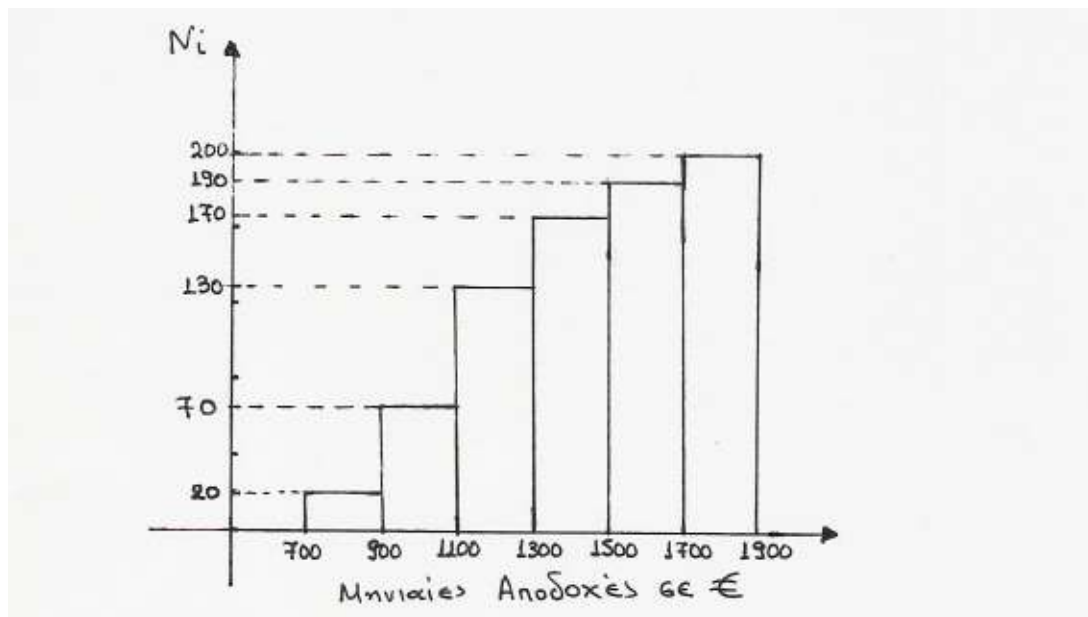
### ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \ln x$ . Να βρεθεί:

- i) το πεδίο ορισμού της  $f$ .
- ii) η τιμή  $f'(1)$ .
- iii) η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παραστάσης της  $f$  στο σημείο  $A(1, f(1))$ , καθώς και η γωνία που σχηματίζει η ευθεία αυτή με τον άξονα  $x'x$ .
- iv) σε ποιο σημείο η εφαπτομένη της  $C_f$  είναι παράλληλη στην ευθεία  $\kappa : y = -2x - 1$ .
- v) να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της  $C_f$  που είναι κάθετη στην ευθεία  $\zeta : y = -2x - 1$ .

### ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>

A) Στο ιστόγραμμα αθροιστικών συχνοτήτων που ακολουθεί, παριστάνονται οι μηνιαίες αποδοχές σε ευρώ, 200 οικογενειών μιας περιοχής των Αθηνών.



- α) Να γίνει πίνακας  $v_i, f_i\%$  και πολύγωνο  $f_i\%$ .
- β) Ποιο ποσοστό % των οικογενειών έχει μηνιαίο εισόδημα:
- Από 1000 έως 1600 ευρώ
  - Από 880 έως 1560 ευρώ
- γ) Αν πήρε οικονομική ενίσχυση το 20% των οικογενειών της περιοχής, να βρείτε ποιες πρέπει να είναι οι μηνιαίες αποδοχές μιας οικογένειας για να δικαιούται οικονομική ενίσχυση.

Β) Οι 100 εργαζόμενοι μιας εταιρείας έχουν αύξηση 10% επί του αρχικού τους μισθού και δώρο επιπλέον 20% του μέσου μισθού. Αν ο CV των αρχικών μισθών είναι 30% να βρεθεί ο CV' των καινούργιων αποδοχών.

(Δίνεται  $\frac{1,1}{1,3} \approx 0,846$ )

#### **ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>**

Οι βαθμοί (με άριστα το 20) που έγραψαν 40 μαθητές μιας τάξης σ'ένα διαγώνισμα, ομαδοποιήθηκαν σε 5 κλάσεις με πλάτος 4. Προέκυψαν το εξής στοιχεία:

- α) Τέσσερις μαθητές είχαν βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 16 και άλλοι τέσσερις μαθητές είχαν βαθμό κάτω του 4.
- β) Δεκαπέντε μαθητές είχαν βαθμό κάτω του 10.
- γ) Η διάμεσος της κατανομής ήταν 12, ενώ η μέση βαθμολογία της τάξης 11.
- Ζητείται: i) Να συμπληρωθεί ο πίνακας συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων.
- Να βρείτε το εύρος, την διασπορά και την τυπική απόκλιση.
  - Να εξετάσετε αν το δείγμα των μαθητών είναι ομοιογενές.
  - Να εξετάσετε αν η κατανομή είναι κανονική.
  - Από το πολύγωνο συχνοτήτων να εκτιμήσετε αν το δείγμα παρουσιάζει θετική ή αρνητική ασυμμετρία.

(Δίνεται:  $\sqrt{20,6} \approx 4,5$ )

**ΟΙ ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ ΚΑΘΩΣ ΚΑΙ ΟΙ ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ ΘΑ ΒΡΙΣΚΟΝΤΑΙ ΣΤΗΝ ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΤΟΥ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟΥ ΜΑΣ**

**[www.apolito.gr](http://www.apolito.gr)**

**ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΘΕΜΑΤΩΝ  
ΜΠΑΤΖΑΚΑΣ ΜΙΧΑΗΛΗΣ  
ΠΕΤΡΟΠΟΥΛΟΣ ΙΩΑΝΝΗΣ  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ**

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**

**ΘΕΜΑ 1ο**

- I) A) α. Σ  
β. Λ  
γ. Λ  
δ. Σ  
ε. Λ  
στ. Λ  
ζ. Λ  
η. Σ

- B) 1:δ  
2:γ  
3:β

- II) A) 1:β  
2:δ  
3:α

$$B) 1. \bar{x}_1 = \frac{0 + 20 + 40 + 50 + 60 + 80 + 100}{7} = 50$$

$$\bar{x}_2 = \frac{0 + 48 + 49 + 50 + 51 + 52 + 100}{7} = 50$$

2. Προφανώς  $s_1^2 > s_2^2$

3. Αφού  $s_1 > s_2 \leftarrow \bar{x}_1 = \bar{x}_2 \rightarrow CV_1 > CV_2$  άρα η μικρότερη ανομοιογένεια (μεγαλύτερη ομοιογένεια) παρουσιάζει το 2<sup>ο</sup> δείγμα.

**ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>**

i) Πρέπει  $x > 0$ , άρα το Π.Ο. της f είναι το  $(0, +\infty)$ .

ii)  $f'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x}$  οπότε  $f'(1) = 1$

iii) Έστω (ε) η εφαπτομένη της  $C_f$  στο  $A(1, f(1))$  τότε

$$\varepsilon : y = \lambda x + \beta \text{ όπου } \lambda = f'(1) = 1 \text{ δηλαδή}$$

$$\varepsilon : y = x + \beta.$$

Η (ε) διέρχεται από το  $A(1, f(1))$  δηλαδή  $A(1, 0)$

οπότε:  $0 = 1 + \beta \Leftrightarrow \beta = -1$  άρα  $\varepsilon : y = x - 1$ .

Έστω  $\omega$  η γωνία που σχηματίζει η (ε) μα τον  $x'x$  τότε  $\varepsilon\varphi\omega = 1 \Leftrightarrow \omega = \frac{\pi}{4}$  αφού

$$0 \leq \omega \leq \pi.$$

iv) Πρέπει  $f'(x_0) = -2 \Leftrightarrow \frac{1}{x_0} = -2 \Leftrightarrow x_0 = -\frac{1}{2}$  αδύνατο αφού  $x_0 > 0$

άρα δεν υπάρχει εφαπτομένη που να είναι παράλληλη στην (κ).

v) Πρέπει:  $f'(x_1) \cdot (-2) = -1 \Leftrightarrow \frac{2}{x_1} = 1 \Leftrightarrow x_1 = 2$

τότε η εφαπτομένη θα έχει συντελεστή διεύθυνσης  $\lambda = \frac{1}{2}$  και θα διέρχεται από το

σημείο  $\Gamma(2, \ln 2)$  άρα θα έχει εξίσωση  $y = \frac{1}{2}x + \beta$  και  $\ln 2 = \frac{1}{2} \cdot 2 + \beta \Leftrightarrow$

$\ln 2 - 1 = \beta$  οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης θα είναι:  $y = \frac{1}{2}x + \ln 2 - 1$ .

### ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>

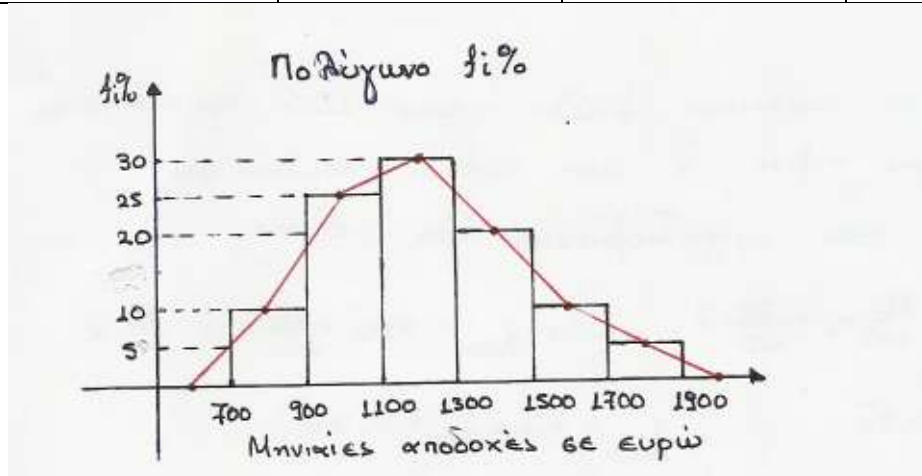
Α. α) Γνωρίζω ότι:  $v_1 = N_1, v_2 = N_2 - N_1, v_3 = N_3 - N_2, v_4 = N_4 - N_3,$

$v_5 = N_5 - N_4, v_6 = N_6 - N_5$  και

$$f_i \% = \frac{v_i}{v} \%, i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

οπότε:

Κλάσεις	$N_i$	$v_i$	$f_i \%$
[700,900)	20	20	10
[900,1100)	70	50	25
[1100,1300)	130	60	30
[1300,1500)	170	40	20
[1500,1700)	190	20	10
[1700,1900)	200	10	5
Σύνολο	-	200	100



β)i) Επειδή οι παρατηρήσεις είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες μέσα στις κλάσεις

Από 1000€ έως 1100€ έχουν μηνιαίο εισόδημα το  $\frac{25}{2} = 12,5\%$  των οικογενειών

ενώ από 1500€ έως 1600€ έχουν μηνιαίο εισόδημα το  $\frac{10}{2} = 5\%$  των οικογενειών

άρα από 1000€ έως 1600€ έχουν μηνιαίο εισόδημα το  $12,5 + 30 + 20 + 5 = 67,5\%$  των οικογενειών.

ii) Σε πλάτος κλάσεις 200 (900-700) αντιστοιχεί το 10% των οικογενειών.

Σε πλάτος κλάσεις 20 (900-880) αντιστοιχεί το  $x\%$  των οικογενειών.

$$\text{άρα } \frac{200}{20} = \frac{10}{x} \Leftrightarrow x = 1\% .$$

Σε πλάτος κλάσεις 200 (1700-1500) αντιστοιχεί το 10% των οικογενειών.

Σε πλάτος κλάσεις 60 (1560-1500) αντιστοιχεί το  $x\%$  των οικογενειών.

$$\frac{200}{60} = \frac{10}{x} \Leftrightarrow x = 3\%$$

άρα από 880€ έως 1560€ μηνιαίο εισόδημα έχουν:  $1+25+30+20+3=79\%$  των οικογενειών.

γ) Το 20% των οικονομικά ασθενέστερων οικογενειών αποτελείται από το 10% των οικογενειών που αντιστοιχεί στην κλάση  $[700,900)$  και από το 10% του ποσοστού των οικογενειών της κλάσης  $[900,1100)$ .

Οπότε Σε πλάτος κλάσης 200 (1100-900) αντιστοιχεί το 25% των οικογενειών.

Σε πλάτος κλάσης  $x$  αντιστοιχεί το 10% των οικογενειών

$$\text{δηλαδή } \frac{200}{x} = \frac{25}{10} \Leftrightarrow x = 80 \rightarrow (980,900).$$

Επομένως για να δικαιούται οικονομική ενίσχυση μια οικογένεια πρέπει να έχει μηνιαίες αποδοχές από 700€ έως 980€.

B. Έστω  $x_1, x_2, \dots, x_{100}$  οι αρχικοί μισθοί των 100 εργαζομένων της εταιρείας με μέση τιμή  $\bar{x}$  και τυπική απόκλιση  $s_x$ .

Τότε οι καινούργιοι μισθοί των εργαζομένων θα είναι:

$$y_1 = x_1 + \frac{10}{100}x_1 + \frac{20}{100}\bar{x}, y_2 = x_2 + \frac{10}{100}x_2 + \frac{20}{100}\bar{x}, \dots, y_{100} = x_{100} + \frac{10}{100}x_{100} + \frac{20}{100}\bar{x}$$

$$\text{δηλαδή } y_1 = 1.1x_1 + 0.2\bar{x}, y_2 = 1.1x_2 + 0.2\bar{x}, \dots, y_{100} = 1.1x_{100} + 0.2\bar{x}$$

$$\text{οπότε } \bar{y} = 1.1\bar{x} + 0.2\bar{x} = 1.3\bar{x}, \quad s_y = 1.1s_x$$

$$\text{και } CV' = \frac{s_y}{\bar{y}} = \frac{1.1 \cdot s_x}{1.3 \cdot \bar{x}} = \frac{1.1}{1.3} \cdot 30\% = 25.38.$$

### ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>

Α. Κατασκευάζουμε τον πίνακα.

Κλάσεις	$x_i$	$v_i$	$N_i\%$	$N_i$	$F_i\%$
[0,4)	2	4	10	4	10
[4,8)	6	$v_2 = 6$	15	10	25
[8,12)	10	$v_3 = 10$	25	20	50
[12,16)	14	$v_4 = 16$	40	36	90
[16,20)	18	4	10	40	100
Σύνολο	-	$v = 40$	100	-	-

Επειδή η διάμεσος  $\delta=12$  τότε  $4 + v_2 + v_3 = 20 \Leftrightarrow v_2 + v_3 = 16$  (1)

και  $v_4 + 4 = 20 \Leftrightarrow v_4 = 16$ .

Επίσης οι βαθμοί κατανέμονται ομοιόμορφα σε κάθε κλάση οπότε από 8 έως 10 θα

έχουμε  $\frac{v_3}{2}$  μαθητές,

άρα  $4 + v_2 + \frac{v_3}{2} = 15 \Leftrightarrow v_2 + \frac{v_3}{2} = 11 \Leftrightarrow 2v_2 + v_3 = 22$  (2)

Από (2)-(1)  $\Rightarrow v_2 = 6$  οπότε  $v_3 = 16 - 6 = 10$ .

Β. Το εύρος είναι  $R = 20 - 0 = 20$  και η διασπορά:

$$s^2 = \frac{(2-11)^2 \cdot 4 + (6-11)^2 \cdot 6 + (10-11)^2 \cdot 10 + (14-11)^2 \cdot 16 + (18-11)^2 \cdot 4}{40}$$

$$= \frac{824}{40} = 20.6$$

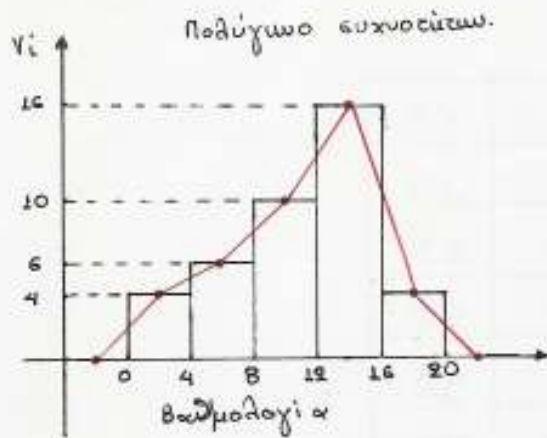
και η τυπική απόκλιση  $s = \sqrt{20.6} \approx 4.5$ .

Γ. Ο συντελεστής μεταβολής ισούται με:  $CV = \frac{s}{x} = \frac{4.5}{11} \cong 41\% > 10\%$  άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

Δ. Αν η κατανομή ήταν κανονική θα έπρεπε  $\delta = \bar{x}$ , επειδή  $\delta = 12 \neq \bar{x} = 11$  η κατανομή δεν είναι κανονική.



Ε



Από το πολύγωνο συχνοτήτων παρατηρούμε ότι το δείγμα παρουσιάζει αρνητική ασυμμετρία.

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ  
ΜΠΑΤΖΑΚΑΣ ΜΙΧΑΛΗΣ  
ΠΕΤΡΟΠΟΥΛΟΣ ΙΩΑΝΝΗΣ  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ