

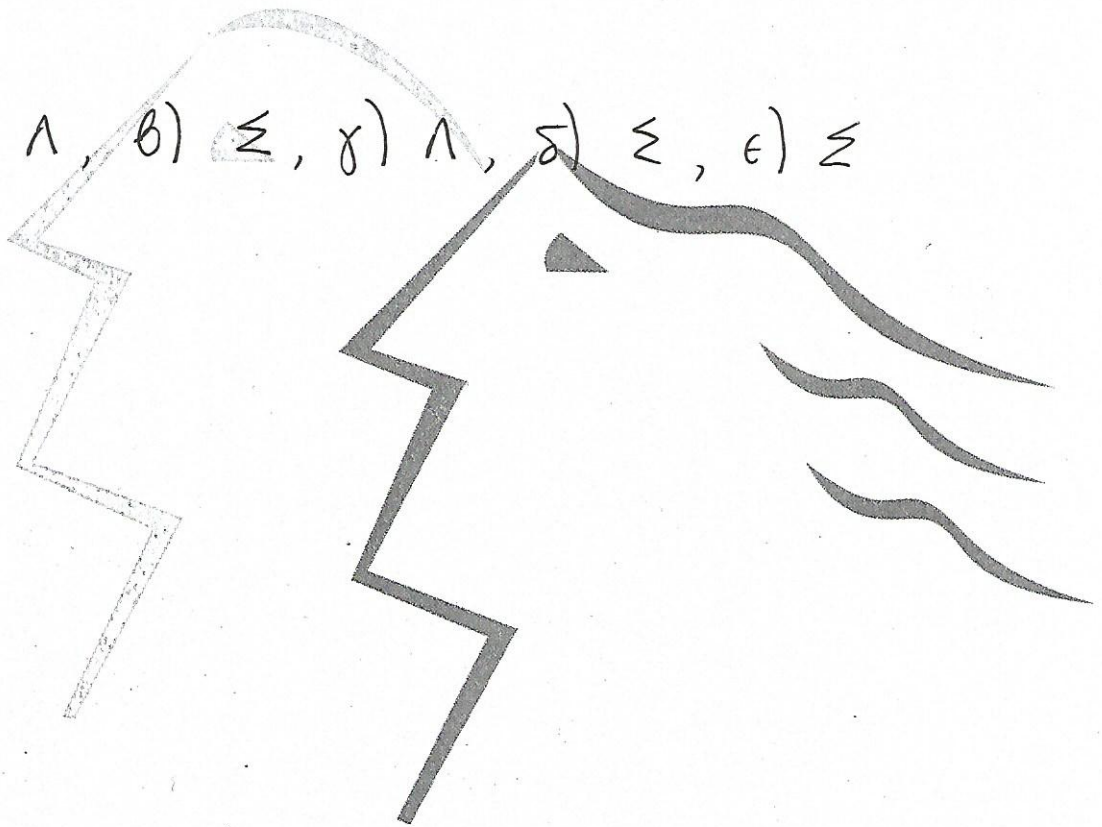
ΘΕΜΑ Α

A₁ $\leq$ β. 60 194

A₂ $\leq$ β. 60 188

A₃ $\leq$ β. 60 259

A₄ α) $\wedge$, β) $\leq$, γ) $\wedge$, δ) $\leq$, ε) $\leq$



ΘΕΜΑ Β

$$|z-4| = 2|z-1| \quad (1)$$

B₁ Ανά $|z|=2$.

$$(1) \Leftrightarrow |z-4|^2 = (2|z-1|)^2 \Rightarrow (z-4)(\bar{z}-4) = 4(z-1)(\bar{z}-1)$$

$$\Leftrightarrow z\bar{z} - 4z - 4\bar{z} + 16 = 4z\bar{z} - 4z - 4\bar{z} + 4$$

$$\Rightarrow 3z\bar{z} = 12 \Rightarrow z\bar{z} = 4 \Rightarrow |z|^2 = 4 \Rightarrow |z| = 2$$

B₂ $w = \frac{2z_1}{z_2} + \frac{2z_2}{z_1}, |z_1|=|z_2|=2$

$$|z_1|=2 \Rightarrow |z_1|^2 = 4 \Rightarrow z_1\bar{z}_1 = 4 \Rightarrow \bar{z}_1 = \frac{4}{z_1}$$

Ομοίως $\bar{z}_2 = \frac{4}{z_2}$

α) Ανά $\bar{w} = w$.

$$\bar{w} = \frac{2\bar{z}_1}{\bar{z}_2} + \frac{2\bar{z}_2}{\bar{z}_1} = \frac{2 \cdot \frac{4}{z_1}}{\frac{4}{z_2}} + \frac{2 \cdot \frac{4}{z_2}}{\frac{4}{z_1}} = 2 \cdot \frac{z_2}{z_1} + 2 \cdot \frac{z_1}{z_2} = w$$

β) $w \in \mathbb{R}$, άρα ανά $|w| \leq 4$.

$$\begin{aligned}
 |w| &= \left| \frac{2z_1}{z_2} + \frac{2z_2}{z_1} \right| \leq \left| \frac{2z_1}{z_2} \right| + \left| \frac{2z_2}{z_1} \right| \\
 &= 2 \cdot \frac{|z_1|}{|z_2|} + 2 \cdot \frac{|z_2|}{|z_1|} \stackrel{|z_1|=|z_2|=2}{=} 2 + 2 = 4.
 \end{aligned}$$

B₃ | $W = -4 \Rightarrow \frac{2z_1}{z_2} + \frac{2z_2}{z_1} = -4 \Rightarrow 2z_1^2 + 2z_2^2 = -4z_2z_1$

$\Rightarrow 2z_1^2 + 2z_2^2 + 4z_2z_1 = 0 \Rightarrow z_1^2 + z_2^2 + 2z_2z_1 = 0$

$\Rightarrow (z_1 + z_2)^2 = 0 \Rightarrow z_1 + z_2 = 0 \Rightarrow z_2 = -z_1$

$\cdot (A\Gamma) = |z_1 - z_3| \stackrel{(y)}{=} |z_1 - 2iz_1| = |z_1| |1 - 2i| \stackrel{(y)}{=} 2\sqrt{5}$

$(B\Gamma) = |z_2 - z_3| = |-z_1 - 2iz_1| = |z_1| \cdot |-1 - 2i| \stackrel{(y)}{=} 2\sqrt{5}$

$(A\Gamma) = (B\Gamma), \text{ άρα}$

$\Delta AB\Gamma \text{ ισοσκελές}$

$1600 \text{ (Α)} \quad \text{1600 (Α)}$

ΘΕΜΑ 3ο

$$\Gamma_1) f'(x) = \frac{e^x(x^2+1) - e^x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{e^x(x-1)^2}{(x^2+1)^2} \geq 0$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$		0	
	$+$		$+$
$f(x)$			

$f \uparrow$ στο $\mathbb{R}$.

$$R_f = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (0, +\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(e^x \cdot \frac{1}{x^2+1} \right) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2+1} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2x} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty$$

$$\Gamma_2) f(e^{3-x} \cdot (x^2+1)) = \frac{2}{e^3} \stackrel{f:1-1}{\iff} \frac{e^3}{e^x} (x^2+1) = \frac{2}{e^3}$$

$$\iff \frac{x^2+1}{e^x} = \frac{2}{e^3} \iff f(x) = \frac{e^3}{2}$$

Όμως $\frac{e^3}{2} \in (0, +\infty) = R_f \xRightarrow{\text{ΘΕΤ}} \text{Θα υπάρχει}$

$x_0 \in (-\infty, +\infty)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = \frac{2}{e^3}$

Επίσης x_0 φανερώνεται αφού $f \uparrow$ στο $\mathbb{R}$.

Γ_3 Θεωρώ $K(x) = \int_a^{2x} f(t) dt$. $f \in C^1$ $K'(x) = f(2x) \cdot 2 > 0$ $\forall x \in (0, +\infty)$.
 $f(x) > 0$

Η σχέση γίνεται: $K(2x) - K(x) < 2x f(4x)$

$x > 0 \Rightarrow \frac{K(2x) - K(x)}{x} < 2f(4x) \quad (1)$

$K: \text{σχης } [x, 2x]$
 $K: \text{παραγ } (x, 2x)$

$\Rightarrow$ Θα υπάρχει $\xi \in (x, 2x)$:
 $K'(\xi) = \frac{K(2x) - K(x)}{x}$

$(1) \Rightarrow K'(\xi) < 2f(4x) \Leftrightarrow 2f(\xi) < 2f(4x)$
 $\Rightarrow f(\xi) < f(4x) \Leftrightarrow \xi < 4x$ (αφού f αυξάνει)

Γ_4 Για $x > 0$ $g'(x) = -\frac{1}{x^2} \int_{2x}^{4x} f(t) dt + \frac{1}{x} (f(4x) \cdot 4 - f(2x))$

$= -\frac{1}{x^2} \left(\int_{2x}^{4x} f(t) dt - x(4f(4x) - 2f(2x)) \right) < \Gamma_3$
 $< -\frac{1}{x^2} (2x f(4x) - 4x f(4x) + 2x f(2x))$

$$= -\frac{1}{x^2} \left(2x f(2x) - 2x f(4x) \right) = \frac{-2}{x} (f(2x) - f(4x))$$

Όμως $2x < 4x \Rightarrow f(2x) < f(4x)$

Άρα $g'(x) > 0$ στο $(0, +\infty)$.

Συνέχεια της g στο 0

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_{2x}^{4x} f(t) dt}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4f(4x) - 2f(2x)}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4f(4x) - 2f(2x)}{1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} [4f(4x) - 2f(2x)] = 2f(0) = 2 = g(0).$$

Άρα g συνεχής στο $[0, +\infty)$ με $g'(x) > 0$ στο $(0, +\infty)$.

$\Rightarrow g \uparrow$ στο $[0, +\infty)$

ΘΕΜΑ Δ

Α1

Έχουμε $f'(x) \cdot e^{f(x)} + f'(x) \cdot e^{-f(x)} = 2$.

$\Leftrightarrow [e^{f(x)} - e^{-f(x)}]' = (2x)'$, $x \in \mathbb{R}$

τότε $e^{f(x)} - e^{-f(x)} = 2x + c$, $x \in \mathbb{R}$

Για $x=0 \rightarrow c=0$

οπότε $e^{f(x)} - e^{-f(x)} = 2x \Leftrightarrow$

$e^{f(x)} - \frac{1}{e^{f(x)}} = 2x \Leftrightarrow$

$[e^{f(x)} - x]^2 = x^2 + 1 \quad (1)$

Θεωρούμε $g(x) = e^{f(x)} - x$

τότε από (1) $\Rightarrow g(x) \neq 0$ και συνεπώς

άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$

Επειδή $g(0) = 1 > 0$

τότε $g(x) > 0$

και $g^2(x) = x^2 + 1$

$\Leftrightarrow g(x) = \sqrt{x^2 + 1} \Leftrightarrow e^{f(x)} - x = \sqrt{x^2 + 1}$

$\Leftrightarrow e^{f(x)} = x + \sqrt{x^2 + 1} \Leftrightarrow f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

Δ2 α) $f'(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} \right)$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$f''(x) = - \frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}}}{x^2 + 1} = - \frac{x}{(x^2 + 1) \cdot \sqrt{x^2 + 1}}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow - \frac{x}{(x^2 + 1)(\sqrt{x^2 + 1})} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f''		$+$	$-$
$f(x)$		$\curvearrowright$	$\curvearrowleft$

Σ.Κ. $f(0) = 0$.

β). Έχουμε $f'(0) = 1$.

Εξίσωση εφαπτ. της C_f στο $(0,0)$: $y = x$.

Επειδή για $x \in [0, 1]$ η f κοίτη. τότε

$$y_{\text{εφ}} \geq f(x) \Leftrightarrow x - \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \geq 0$$

"0" = "0" για $x=0$.

Άρα $E = \int_0^1 (x - \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})) dx$.

$$= \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 - \int_0^1 (x)' \cdot \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) dx$$

$$= \frac{1}{2} - [x \cdot \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})]_0^1 + \int_0^1 x \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} - \ln(1+\sqrt{2}) + \left[\sqrt{x^2+1} \right]_0^1 \\
 &= \frac{1}{2} - \ln(1+\sqrt{2}) + \sqrt{2} - 1 \\
 &= \sqrt{2} - \ln(1+\sqrt{2}) - \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Δ3. Έχουμε $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(e^{\int_0^x f^2(t) dt} - 1 \right) = 1 - 1 = 0$

και $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln |f(x)| = -\infty$.

Παρατηρούμε ότι: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\int_0^x f^2(t) dt} - 1}{x} \stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^2(x) \cdot e^{\int_0^x f^2(t) dt}}{1}$

$= 0$

και $\lim_{x \rightarrow 0^+} [x \ln |f(x)|] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln f(x)}{\frac{1}{x}} =$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{f'(x)}{f(x)}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{-\sqrt{x^2+1} \cdot \ln(x+\sqrt{x^2+1})} = 0$

αφού $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{\ln(x+\sqrt{x^2+1})} \stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x}{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}} = 0$

και $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = 1$.

Άρα $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(e^{\int_0^x f^2(t) dt} - 1 \right) \cdot \ln |f(x)| = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{e^{\int_0^x f^2(t) dt} - 1}{x} \cdot x \cdot \ln |f(x)| \right)$
 $= 0 \cdot 0 = 0$.

Δ4 Θεωρούμε συνάρτηση h

$$h(x) = (x-2) \cdot \left[1 - 3 \int_0^{x-2} f(t^2) dt \right] + (x-3) \left[8 - 3 \int_0^x f(t^2) dt \right]$$

Η h είναι συνεχής στο $[2,3]$ ως πράξεις
 συνεχών

$$h(2) = 3 \cdot \int_0^2 f^2(t) dt - 8.$$

$$h(3) = 1 - 3 \cdot \int_0^1 f(t^2) dt.$$

Για $x \in [0,2]$ $f(x) \leq x$ (υπόθεση).
 τότε

$$\Leftrightarrow f^2(x) \leq x^2 \quad \text{μόνο για } x=0$$

$$\int_0^1 f^2(x) dx < \int_0^1 x^2 dx \Leftrightarrow -3 \int_0^1 f^2(x) dx > -3 \cdot \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow 1 - 3 \int_0^1 f^2(x) dx > 0 \Leftrightarrow h(2) > 0$$

Για $x \in [0,1]$ $f(x) \leq x$

τοποθετώ στην
 θέση του x το
 x^2 .

$$f(x^2) \leq x^2 \quad \text{τότε} \quad \int_0^2 f(x^2) dx \leq \int_0^2 x^2 dx$$

$$\Leftrightarrow 3 \int_0^2 f(x^2) dx < 3 \cdot \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2 \Leftrightarrow$$

$$3 \cdot \int_0^2 f(x^2) dx < 8 \Leftrightarrow 3 \int_0^2 f(x^2) dx - 8 < 0$$

$$\Leftrightarrow h(3) < 0.$$

Οπότε ισχύει το Θ. Βολτανο στο $[2,3]$
και υπάρχει $x_0 \in (2,3)$:

$$h(x_0) = 0 \Leftrightarrow \frac{1-3 \cdot \int_0^{x_0-2} f(t^2) dt}{x_0-3} + \frac{8-3 \int_0^{x_0-2} f^2(t) dt}{x_0-2} = 0$$

