ΘΕΜΑ 1ο

A1) Σχολικό σελ. 31

A2) Σχολικό σελ. 22

A3) Σχολικό σελ. 87.

A4) α) Λ β) Σ γ) Λ δ) Λ ε) Σ

Τηλ./Fax: 210.62.19.712, Τηλ.: 210.62.18.894 www.apolito.gr - e-mail: info@apolito.gr
Λεωφόρος Μαραθώνος & Χρυσοστόμου Σμύρνης 3, 14565 ΑΓΙΟΣ ΣΤΕΦΑΝΟΣ

ΘΕΜΑ 2ο

B1) $(3x-1)(8x^2-6x+1)=0 \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} 3x-1=0 \\ \quad ή \\ 8x^2-6x+1=0 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x=\frac{1}{3} \\ \quad ή \\ x=\frac{1}{4} \\ \quad ή \\ x=\frac{1}{2} \end{array}\right.$

Αφού $A\cap B \subseteq A \subseteq A\cup B \Rightarrow$

$P(A\cap B) \le P(A) \le P(A\cup B)$

οπότε $P(A\cap B)=\frac{1}{4}$

$P(A)=\frac{1}{3}$

$P(A\cup B)=\frac{1}{2}$.

B2) $P(A'-B') = P(A'\cap B) = P(B-A) = P(B)-P(A\cap B)$.

Όμως από προσθετικό νόμο πιθανοτήτων

$P(B) = P(A\cup B)+P(A\cap B)-P(A) = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{3} = \frac{5}{12}$

Άρα $P(A'-B') = \frac{5}{12}-\frac{1}{4} = \frac{1}{6}$

$P(\Delta) = P[(A\cap B)'] = 1-P(A\cap B) = 1-\frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

B3) $P[\underbrace{(A-B)\cup(B-A)}_{\text{ξένα}}] = P(A-B)+P(B-A) =$

$= P(A)+P(B)-2P(A\cap B) = \frac{1}{3}+\frac{5}{12}-2\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

B4) Έστω ότι τα ενδεχόμενα Β, Γ είναι ασυμβίβαστα. Τότε $P(B\cup \Gamma) = P(B)+P(\Gamma)$

$\overset{*}{=} \frac{5}{12}+\frac{2}{3} = \frac{13}{12} > 1$ άτοπο

Άρα τα Β, Γ όχι ασυμβίβαστα.

(*) $9x^2-3x-2=0 \Leftrightarrow x=\frac{2}{3}$ άρα $P(\Gamma)=\frac{2}{3}$

ή

$x=-\frac{1}{3}$ απορρίπτεται

Τηλ./Fax: 210.62.19.712, Τηλ.: 210.62.18.894 www.apolito.gr - e-mail: info@apolito.gr
Λεωφόρος Μαραθώνος & Χρυσοστόμου Σμύρνης 3, 14565 ΑΓΙΟΣ ΣΤΕΦΑΝΟΣ

ΘΕΜΑ Γ

Γ1 $f_1\% = 10$, $f_5\% = 30$.

$\alpha_3 = f_3 \cdot 360° \Leftrightarrow f_3 = \frac{108°}{360°} = 0,3$, $f_3\% = 30$

$f_2 + f_4 = 1 - 0,7 = 0,3$.

$\bar{x} = \sum_{i=1}^{5} x_i f_i \Leftrightarrow 14 = 9 \cdot 0,1 + 11 f_2 + 13 \cdot 0,3 + 15(0,3 - f_2)$

$+ 17 \cdot 0,3 \Leftrightarrow 14 = 0,9 + 11 f_2 + 3,9 + 4,5 - 15 f_2 + 5,1$

$\Leftrightarrow 4 f_2 = 0,4 \Leftrightarrow f_2 = 0,1$ οπότε $f_2\% = 10$.

Και $f_4\% = 20$.

Γ2 $s^2 = \sum x_i^2 f_i - \bar{x}^2 \Leftrightarrow$

$s^2 = 202,6 - 14^2 \Leftrightarrow s^2 = 6,6$.

άρα $s = \sqrt{6,6} \simeq 2,57$

$CV = \frac{s}{|\bar{x}|} = \frac{2,57}{14} > \frac{1}{10}$

Άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές

Γ3 $\frac{9\nu_1}{\nu} + \frac{11\nu_2}{\nu} + \frac{13\nu_3}{\nu} + \frac{15\nu_4}{\nu} = \frac{1780}{\nu} \Leftrightarrow$

$9f_1 + 11 f_2 + 13 f_3 + 15 f_4 = \frac{1780}{\nu} \Leftrightarrow$

$8,9 = \frac{1780}{\nu} \Leftrightarrow \nu = 200$

απόλυτο
εκπαιδευτικός οργανισμός

$\boxed{\Gamma 4}$ Έχουμε: $b_i = \frac{1}{s_a} a_i - \frac{\bar{a}}{s_a}$.

Από γνωστή εφαρμογή

$$\bar{b} = \frac{1}{s_a}\cdot\bar{a} - \frac{\bar{a}}{s_a} = 0 \quad \text{και}$$

$$s_b = \left|\frac{1}{s_a}\right|\cdot s_a = \frac{1}{s_a}\cdot s_a = 1.$$

Τηλ./Fax: 210.62.19.712, Τηλ.: 210.62.18.894 www.apolito.gr - e-mail: info@apolito.gr
Λεωφόρος Μαραθώνος & Χρυσοστόμου Σμύρνης 3, 14565 ΑΓΙΟΣ ΣΤΕΦΑΝΟΣ

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.
Εφαρμόζουμε Πυθαγόρειο Θεώρημα στο $\overset{\triangle}{ΑΒΓ}$: $ΑΓ^2 = ΑΒ^2 + ΒΓ^2 \Leftrightarrow 10^2 = x^2 + ΒΓ^2 \Leftrightarrow$

$ΒΓ = \sqrt{100 - x^2}$, $0 < x < 10$.

Άρα $f(x) = $ Εμβαδόν $(ΑΒΓΔ) = ΑΒ \cdot ΒΓ = x \cdot \sqrt{100 - x^2}$; $0<x<10$

Δ2. $f'(x) = \sqrt{100 - x^2} + x \cdot \dfrac{-2x}{2\sqrt{100 - x^2}}$

$$= \frac{100 - 2x^2}{\sqrt{100 - x^2}}.$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 50 \Leftrightarrow x = 2\sqrt{5}$

x	0		$5\sqrt{2}$		10
$f'(x)$		$+$		$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	Μέγιστο	$\searrow$	

οπότε για $x = 5\sqrt{2}$ έχουμε μέγιστο εμβαδόν

και $ΒΓ = \sqrt{100 - (5\sqrt{2})^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} = ΑΒ$

άρα το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο.

Δ3 Έχουμε $f'(1)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1+x)-f(1)}{x}=\dfrac{f(1+x)-\sqrt{99}}{x}$.

και $f'(1)=\dfrac{98}{\sqrt{99}}$.

άρα $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1+x)-\sqrt{99}}{98\cdot x}=\dfrac{1}{98}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1+x)-\sqrt{99}}{x}$

$=\dfrac{1}{98}\cdot f'(1)=\dfrac{1}{98}\cdot\dfrac{98}{\sqrt{99}}=\dfrac{\sqrt{99}}{99}$.

Δ4 Αφού $A-B\subseteq A$ τότε $P(A-B)\leq P(A)\leq 1$.

$\overset{f\uparrow}{\Longleftrightarrow} f(P(A-B))\leq f(P(A)) \Longleftrightarrow P(A-B)\cdot\sqrt{100-P^2(A-B)}\leq$

$P(A)\cdot\sqrt{100-P^2(A)} \Longleftrightarrow \dfrac{P(A-B)}{\sqrt{100-P^2(A)}}\leq\dfrac{P(A)}{\sqrt{100-P^2(A-B)}}$

Επίσης $\dfrac{P(A)}{\sqrt{100-P^2(A-B)}}<5\sqrt{2} \Longleftrightarrow$

$P^2(A)<50\cdot(100-P^2(A-B)) \Longleftrightarrow$

$P^2(A)+50P^2(A-B)\leq 5000$ ισχύει.

Άρα $\dfrac{P(A-B)}{\sqrt{100-P^2(A)}}\leq\dfrac{P(A)}{\sqrt{100-P^2(A-B)}}<5\sqrt{2}$.

$\overset{f\uparrow}{\Longleftrightarrow} f\left(\dfrac{P(A-B)}{\sqrt{100-P^2(A)}}\right)\leq f\left(\dfrac{P(A)}{\sqrt{100-P^2(A-B)}}\right)$.

Τηλ./Fax: 210.62.19.712, Τηλ.: 210.62.18.894 www.apolito.gr - e-mail: info@apolito.gr
Λεωφόρος Μαραθώνος & Χρυσοστόμου Σμύρνης 3, 14565 ΑΓΙΟΣ ΣΤΕΦΑΝΟΣ

* $2^{ος}$ Τρόπος στο Δ3

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1+x)-\sqrt{99}}{98x}=\frac{1}{98}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)\sqrt{100-(1+x)^2}-\sqrt{99}}{x}$$

$$=\frac{1}{98}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^2\cdot[100-(1+x)^2]-99}{x\cdot[(1+x)\cdot\sqrt{100-(1+x)^2}+\sqrt{99}]}$$

$$=\frac{1}{98}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{-[(1+x)^4-100\cdot(1+x)^2+99]}{x\cdot[(1+x)\sqrt{100-(1+x)^2}+\sqrt{99}]}$$

$$=\frac{1}{98}\lim_{x\to 0}\frac{-[(1+x)^2-1]\cdot[(1+x)^2-99]}{x\cdot[(1+x)\cdot\sqrt{100-(1+x)^2}+\sqrt{99}]}$$

$$=\frac{1}{98}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{-(1+x+1)\cdot\cancel{x}\cdot[(1+x)^2-99]}{\cancel{x}\cdot[(1+x)\cdot\sqrt{100-(1+x)^2}+\sqrt{99}]}$$

$$=\frac{1}{98}\cdot\frac{-2\cdot(-98)}{\sqrt{99}+\sqrt{99}}=\frac{1}{\sqrt{99}}=\frac{\sqrt{99}}{99}$$