

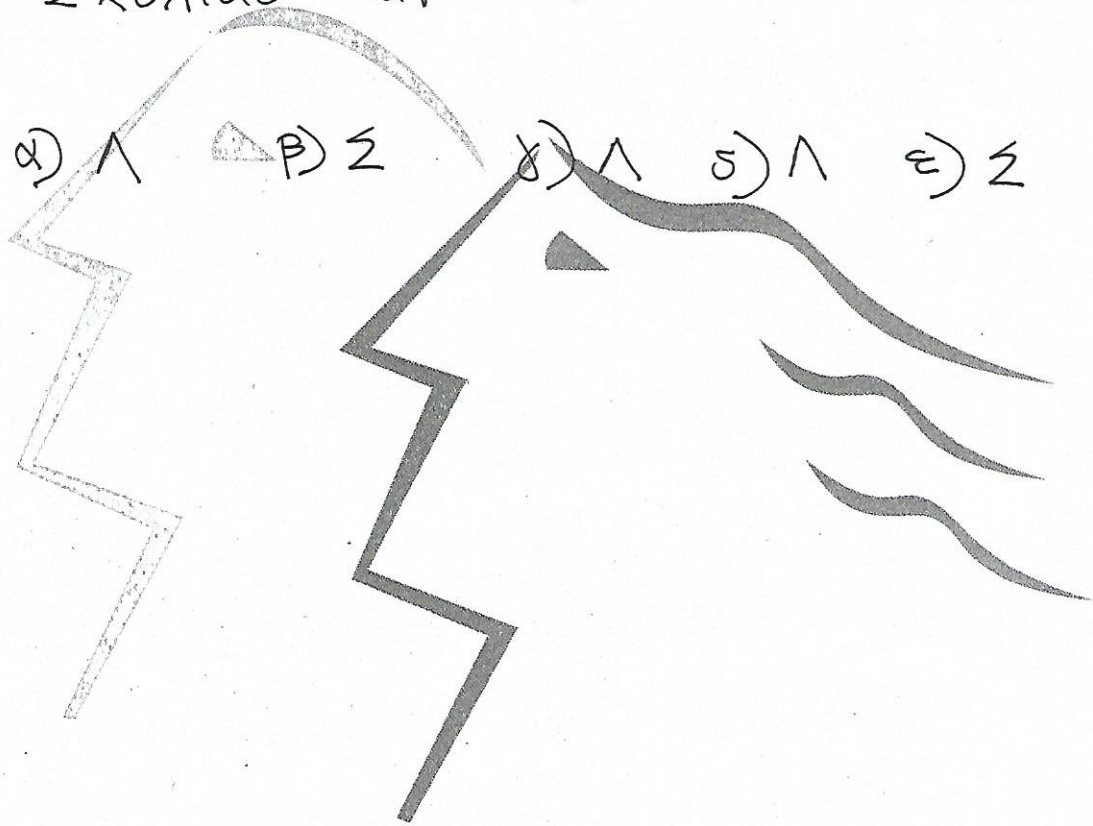
ΘΕΜΑ 1ο

A₁) Σχολιό βελ. 31

A₂) Σχολιό βελ. 99

A₃) Σχολιό βελ. 87.

A₄) α) Λ β) Σ γ) Λ δ) Λ ε) Σ



ΘΕΜΑ 2ο

$$B_1) (3x-1)(8x^2-6x+1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-1=0 \\ \vee \\ 8x^2-6x+1=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ \vee \\ x = \frac{1}{4} \\ \vee \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Αφού $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B \Rightarrow$

$$P(A \cap B) \leq P(A) \leq P(A \cup B)$$

οπότε $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$

$$P(A) = \frac{1}{3}$$

$$P(A \cup B) = \frac{1}{2}$$

$$B_2) P(A' - B') = P(A \cap B) = P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$$

Όπως από προσθετικό νόμο πιθανοτήτων

$$P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B) - P(A) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = \frac{5}{12}$$

$$\text{Άρα } P(A' - B') = \frac{5}{12} - \frac{1}{4} = \frac{1}{6}$$

$$P(\Delta) = P[(A \cap B)'] = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$B_3) P[\underbrace{(A-B) \cup (B-A)}_{\text{Σέυα}}] = P(A-B) + P(B-A) =$$

$$= P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{5}{12} - 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

B4) Έστω ότι τα ευδεχόμενα B, Γ είναι
αυψβίβατα. Τότε $P(B \cup \Gamma) = P(B) + P(\Gamma)$

$$\textcircled{*} = \frac{5}{12} + \frac{2}{3} = \frac{13}{12} > 1 \text{ άτοπο}$$

Άρα τα B, Γ όχι αυψβίβατα

$$\textcircled{*} \quad 9x^2 - 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3} \text{ άρα } P(\Gamma) = \frac{2}{3}$$

ή

$$x = -\frac{1}{3} \text{ άπορρίπτεται}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1 $f_1\% = 10$, $f_5\% = 30$.

$$\alpha_3 = f_3 \cdot 360^\circ \Leftrightarrow f_3 = \frac{108^\circ}{360^\circ} = 0,3 \quad , \quad f_3\% = 30$$

$$f_2 + f_4 = 1 - 0,7 = 0,3.$$

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \sum_{i=1}^5 x_i f_i \Leftrightarrow 14 = 9 \cdot 0,1 + 11 f_2 + 13 \cdot 0,3 + 15(0,3 - f_2) \\ &+ 17 \cdot 0,3 \Leftrightarrow 14 = 0,9 + 11 f_2 + 3,9 + 4,5 - 15 f_2 + 5,1 \\ &\Leftrightarrow 4 f_2 = 0,4 \Leftrightarrow f_2 = 0,1 \quad \text{οπότε } f_2\% = 10 \end{aligned}$$

Και $f_4\% = 20$.

Γ2 $S^2 = \sum x_i^2 \cdot f_i - \bar{x}^2 \Leftrightarrow$

$$S^2 = 202,6 - 14^2 \Leftrightarrow S^2 = 6,6.$$

άρα $S = \sqrt{6,6} \approx 2,57$

$$CV = \frac{S}{|\bar{x}|} = \frac{2,57}{14} > \frac{1}{10}$$

Άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές

Γ3 $\frac{9v_1}{v} + \frac{11v_2}{v} + \frac{13v_3}{v} + \frac{15v_4}{v} = \frac{1780}{v} \Leftrightarrow$

$$9f_1 + 11f_2 + 13f_3 + 15f_4 = \frac{1780}{v} \Leftrightarrow$$

$$8,9 = \frac{1780}{v} \Leftrightarrow v = 200$$

Γ4) Έχουμε. $b_i = \frac{1}{S_a} a_i - \frac{\bar{a}}{S_a}$

Από γνωστή εφαρμογή

$$\bar{b} = \frac{1}{S_a} \cdot \bar{a} - \frac{\bar{a}}{S_a} = 0. \quad \text{και}$$

$$S_b = \left| \frac{1}{S_a} \right| \cdot S_a = \frac{1}{S_a} \cdot S_a = 1.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Εφαρμόζουμε Πυθαγόρειο Θεώρημα στο.
 $\triangle AB\Gamma : A\Gamma^2 = AB^2 + B\Gamma^2 \Leftrightarrow 10^2 = x^2 + B\Gamma^2 \Leftrightarrow$

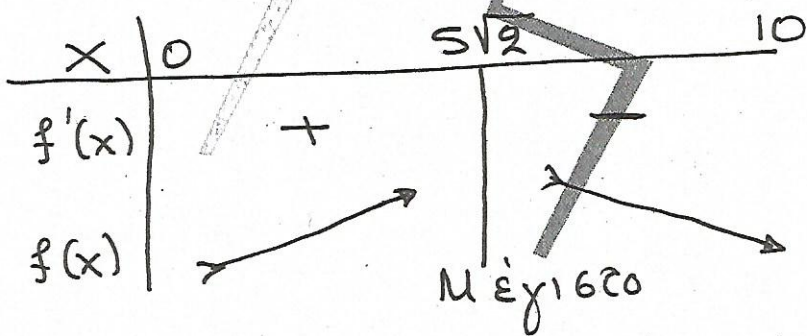
$$B\Gamma = \sqrt{100 - x^2}, \quad 0 < x < 10.$$

Άρα $f(x) = \text{Εμβαδόν}(AB\Gamma) = AB \cdot B\Gamma = x \cdot \sqrt{100 - x^2}, \quad 0 < x < 10$

$$\Delta 2. f'(x) = \sqrt{100 - x^2} + x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{100 - x^2}}$$

$$= \frac{100 - 2x^2}{\sqrt{100 - x^2}}$$

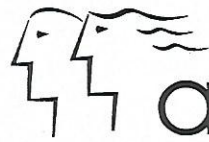
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 50 \Leftrightarrow x = 2\sqrt{5}$$



οπότε για $x = 2\sqrt{5}$ έχουμε μέγιστο εμβαδόν

$$\text{και } B\Gamma = \sqrt{100 - (2\sqrt{5})^2} = \sqrt{50} = 2\sqrt{5} = AB$$

Άρα το $AB\Gamma$ είναι τετράγωνο.



Δ3 Έχουμε $f'(1) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+x) - f(1)}{x} = \frac{f(1+x) - \sqrt{99}}{x}$

και $f'(1) = \frac{98}{\sqrt{99}}$

άρα $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+x) - \sqrt{99}}{98 \cdot x} = \frac{1}{98} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+x) - \sqrt{99}}{x}$

$= \frac{1}{98} \cdot f'(1) = \frac{1}{98} \cdot \frac{98}{\sqrt{99}} = \frac{\sqrt{99}}{99}$

Δ4 Αφού $A - B \subseteq A$ τότε $P(A-B) \leq P(A) \leq 1$.

$f \uparrow$
 $\Leftrightarrow f(P(A-B)) \leq f(P(A)) \Leftrightarrow P(A-B) \cdot \sqrt{100 - P^2(A-B)} \leq$

$P(A) \cdot \sqrt{100 - P^2(A)} \Leftrightarrow \frac{P(A-B)}{\sqrt{100 - P^2(A)}} \leq \frac{P(A)}{\sqrt{100 - P^2(A)}}$

Επίσης $\frac{P(A)}{\sqrt{100 - P^2(A-B)}} \leq 5\sqrt{2} \Leftrightarrow$

$P^2(A) < 50 \cdot (100 - P^2(A-B)) \Leftrightarrow$

$P^2(A) + 50P^2(A-B) \leq 5000$ 16xύει.

Άρα $\frac{P(A-B)}{\sqrt{100 - P^2(A)}} \leq \frac{P(A)}{\sqrt{100 - P^2(A-B)}} < 5\sqrt{2}$.

$f \uparrow$
 $\Leftrightarrow f\left(\frac{P(A-B)}{\sqrt{100 - P^2(A)}}\right) \leq f\left(\frac{P(A)}{\sqrt{100 - P^2(A-B)}}\right)$



* 2^{ος} Τρόπος βδο Δ3

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+x) - \sqrt{99}}{98x} &= \frac{1}{98} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x) \sqrt{100 - (1+x)^2} - \sqrt{99}}{x} \\ &= \frac{1}{98} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^2 \cdot [100 - (1+x)^2] - 99}{x \cdot [(1+x) \cdot \sqrt{100 - (1+x)^2} + \sqrt{99}]} \\ &= \frac{1}{98} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{- [(1+x)^4 - 100 \cdot (1+x)^2 + 99]}{x \cdot [(1+x) \cdot \sqrt{100 - (1+x)^2} + \sqrt{99}]} \\ &= \frac{1}{98} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{- [(1+x)^2 - 1] \cdot [(1+x)^2 - 99]}{x \cdot [(1+x) \cdot \sqrt{100 - (1+x)^2} + \sqrt{99}]} \\ &= \frac{1}{98} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{- (1+x+1) \cdot x \cdot [(1+x)^2 - 99]}{x \cdot [(1+x) \cdot \sqrt{100 - (1+x)^2} + \sqrt{99}]} \\ &= \frac{1}{98} \cdot \frac{- 2 \cdot (-98)}{\sqrt{99} + \sqrt{99}} = \frac{1}{\sqrt{99}} = \frac{\sqrt{99}}{99} \end{aligned}$$