

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1^ο

A) Να αποδείξετε ότι:

- i. Αν μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.
(10 μονάδες)
- ii. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , τότε η συνάρτηση $f + g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει: $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.
(10 μονάδες)

B) Να χαρακτηρίσετε ως σωστές (Σ) ή λάθος (Λ) τις παρακάτω προτάσεις.

- i. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,1]$, παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ και $f'(x) \neq 0$ για όλα τα $x \in (0,1)$, τότε $f(0) \neq f(1)$.
- ii. Οι μιγαδικοί $z_1 = \rho\eta\mu\theta + \rho\sigma\nu\theta \cdot i$ και $z_2 = \rho i$ έχουν ίσα μέτρα.
- iii. Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ τότε η ευθεία $x = l$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στα $+\infty$.
- iv. Το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα μιας συνάρτησης είναι μέγιστο αυτής.
- v. Αν η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in (\alpha, \beta)$, τότε η f δεν παρουσιάζει ακρότατο στο x_0 .

(5 μονάδες)

ΘΕΜΑ 2^ο

A) Αν για τον μιγαδικό z ισχύει ότι: $|z - 3 + 4i| = 1$ τότε:

- i. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας του z .
- ii. Να βρεθεί το μέγιστο και το ελάχιστο μέτρο του z .

(15 μονάδες)

B) Έστω η ευθεία $y = 2x + 5$, είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο $+\infty$. Να βρείτε τα όρια:

α. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x]$

β. Να βρείτε το $\mu \in \mathbb{R}$ αν: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\mu f(x) + 4x}{xf(x) - 2x^2 + 3x} = 1$.

(10 μονάδες)

ΘΕΜΑ 3^ο

A) Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ώστε να ισχύει $f(5x) = 5f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4 \in (1, 5)$ ώστε

$$f'(\xi_1) + f'(\xi_2) + f'(\xi_3) + f'(\xi_4) = 20, \text{ εάν } f\left(\frac{1}{5}\right) = 1.$$

(15 μονάδες)

B) Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, τρεις φορές παραγωγίσιμη στο (α, β) , με $f(\alpha) + f\left(\frac{\alpha + 2\beta}{3}\right) = 2f\left(\frac{2\alpha + \beta}{3}\right)$ και $f(\beta) + f\left(\frac{2\alpha + \beta}{3}\right) = 2f\left(\frac{\alpha + 2\beta}{3}\right)$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\theta \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f^{(3)}(\theta) = 0$.

(10 μονάδες)

ΘΕΜΑ 4^ο

Έστω η δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν:

$$f''(x) < 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

και

$$f(0) = f(1) = 0 \quad (2)$$

- i. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε να ισχύει $f'(x_0) = 0$.
(5 μονάδες)
- ii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f στο x_0 του ερωτήματος (i) παρουσιάζει μέγιστο.
(5 μονάδες)
- iii. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
(10 μονάδες)
- iv. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) \cdot f''(x) + [f'(x)]^2 = 0$ έχει τουλάχιστον μια λύση στο διάστημα $(0, 1)$.
(5 μονάδες)

**ΟΙ ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ ΚΑΘΩΣ ΚΑΙ ΟΙ ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ ΘΑ
ΒΡΙΣΚΟΝΤΑΙ ΣΤΗΝ ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΤΟΥ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟΥ ΜΑΣ**

www.apolito.gr

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΘΕΜΑΤΩΝ
ΜΠΑΤΖΑΚΑΣ ΜΙΧΑΗΛΗΣ
ΠΕΤΡΟΠΟΥΛΟΣ ΓΙΑΝΝΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

A)

- i. Θεωρία σχολικού σελ. 217
- ii. Θεωρία σχολικού σελ. 229

B)

- i. Σ
- ii. Σ
- iii. Λ
- iv. Λ
- v. Λ

ΘΕΜΑ 2^ο

A)

- i. $|z - (3 - 4i)| = 1$ άρα κύκλος με κέντρο το $K(3, -4)$ και $\rho = 1$.
- ii. $||z| - |-3 + 4i|| \leq |z + (-3 + 4i)| \leq |z| + |-3 + 4i|$
 $||z| - 5| \leq 1 \leq |z| + 5$ άρα από την πρώτη ανισότητα $-1 \leq |z| - 5 \leq 1 \Leftrightarrow 4 \leq |z| \leq 6$.

B)

α. Γνωρίζουμε ότι: αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \lambda x) = \beta$, τότε η ευθεία

$y = \lambda x + \beta$, είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Οπότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$ και $\lim_{x \rightarrow +5} [f(x) - 2x] = 5$.

$$\beta. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\mu f(x) + 4x}{xf(x) - 2x^2 + 3x} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\mu \frac{f(x)}{x} + \frac{4x}{x}}{\frac{xf(x)}{x} - \frac{2x^2}{x} + \frac{3x}{x}} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\mu \left(\frac{f(x)}{x} \right) + 4}{(f(x) - 2x) + 3} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\mu \cdot 2 + 4}{5 + 3} = 1 \Leftrightarrow 2\mu + 4 = 8 \Leftrightarrow \mu = 2$$

ΘΕΜΑ 3^ο

A) Εφαρμόζουμε για την f το Θ.Μ.Τ. στα διαστήματα $[1,2]$, $[2,3]$, $[3,4]$, $[4,5]$, οπότε υπάρχουν $\xi_1 \in (1,2)$, $\xi_2 \in (2,3)$, $\xi_3 \in (3,4)$, $\xi_4 \in (4,5)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1) = f(2) - f(1)$, $f'(\xi_2) = f(3) - f(2)$, $f'(\xi_3) = f(4) - f(3)$, $f'(\xi_4) = f(5) - f(4)$.

Συνεπώς

$$\begin{aligned} f'(\xi_1) + f'(\xi_2) + f'(\xi_3) + f'(\xi_4) &= f(5) - f(1) = 5f(1) - f(1) = 4f(1) = \\ &= 4f\left(5 \cdot \frac{1}{5}\right) = 4 \cdot 5 \cdot f\left(\frac{1}{5}\right) = 20 \end{aligned}$$

B) Είναι $\frac{2\alpha + \beta}{3} < \frac{\alpha + 2\beta}{3} \Leftrightarrow \alpha < \beta$.

Η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στα διαστήματα $\left[\alpha, \frac{2\alpha + \beta}{3}\right]$,

$$\left[\frac{2\alpha + \beta}{3}, \frac{\alpha + 2\beta}{3}\right], \left[\frac{\alpha + 2\beta}{3}, \beta\right].$$

Άρα υπάρχουν ξ_1, ξ_2, ξ_3 που ανήκουν στα $\left(\alpha, \frac{2\alpha + \beta}{3}\right)$, $\left(\frac{2\alpha + \beta}{3}, \frac{\alpha + 2\beta}{3}\right)$,

$$\left(\frac{\alpha + 2\beta}{3}, \beta\right) \text{ αντίστοιχα τέτοια ώστε } f'(\xi_1) = \frac{f\left(\frac{2\alpha + \beta}{3}\right) - f(\alpha)}{\frac{\beta - \alpha}{3}},$$

$$f'(\xi_2) = \frac{f\left(\frac{\alpha + 2\beta}{3}\right) - f\left(\frac{2\alpha + \beta}{3}\right)}{\frac{\beta - \alpha}{3}}, \quad f'(\xi_3) = \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha + 2\beta}{3}\right)}{\frac{\beta - \alpha}{3}}.$$

Θεωρούμε την συνάρτηση f' η οποία στο διάστημα $[\xi_1, \xi_2]$ είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(\xi_1) = f'(\xi_2) \Leftrightarrow \frac{f\left(\frac{2\alpha + \beta}{3}\right) - f(\alpha)}{\frac{\beta - \alpha}{3}} = \frac{f\left(\frac{\alpha + 2\beta}{3}\right) - f\left(\frac{2\alpha + \beta}{3}\right)}{\frac{\beta - \alpha}{3}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f\left(\frac{2\alpha + \beta}{3}\right) - f(\alpha) = f\left(\frac{\alpha + 2\beta}{3}\right) - f\left(\frac{2\alpha + \beta}{3}\right), \text{ που ισχύει από υπόθεση.}$$

Επομένως με βάση το θεώρημα Rolle υπάρχει $x_1 \in (\xi_1, \xi_2)$ τέτοιο ώστε $f''(x_1) = 0$.

Όμοια με εφαρμογή του θεωρήματος Rolle για την f' στο $[\xi_2, \xi_3]$, προκύπτει ότι υπάρχει $x_2 \in (\xi_2, \xi_3)$ τέτοιο ώστε $f''(x_2) = 0$.

Τέλος η f'' στο $[x_1, x_2]$ είναι παραγωγίσιμη με $f''(x_1) = f''(x_2) = 0$.

Επομένως με βάση το θεώρημα Rolle, υπάρχει $\theta \in (x_1, x_2) \subset (\alpha, \beta)$ ώστε $f'''(\theta) = 0$.

ΘΕΜΑ 4^ο

- i. Θεώρημα Rolle για την f στο διάστημα $[0, 1]$ και μονοτονία της f' με τη βοήθεια της σχέσης (1).
- ii. Από το ερώτημα (i) και τις σχέσεις (1) και (2) βρίσκουμε:
 - αν $x < x_0$, τότε $f'(x) > f'(x_0) = 0$, άρα η f στο $(-\infty, x_0]$ είναι γνησίως αύξουσα,
 - αν $x > x_0$, τότε $f'(x) < f'(x_0) = 0$, άρα η f στο $[x_0, +\infty)$ είναι γνησίως φθίνουσα.

Από τα παραπάνω έχουμε ότι το $f(x_0)$ είναι μέγιστο της f .

- iii. Από ερωτήματα (i) και (ii) έχουμε $0 < x_0 < 1$, οπότε αν $x > 1 > x_0$, τότε $f'(x) < f'(1) < f'(x_0) = 0$, άρα $f'(x) < f'(1) < 0$ (3)

Από το Θ.Μ.Τ. για την f στο διάστημα $[1, x]$ βρίσκουμε $\xi \in (1, x)$, ώστε

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(\xi) < f'(1), \text{ οπότε με τη βοήθεια της σχέσης (1) προκύπτει:}$$

$$f(x) < (x - 1) \cdot f'(1) + f(1), \quad x > 1 \quad (4)$$

Και επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} ((x - 1)f'(1) + f(1)) = -\infty$ (3) θα έχουμε από την (4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

- iv. Θεώρημα Rolle για τη συνάρτηση $g = f \cdot f'$ στο $[0, 1]$.

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ
ΜΠΑΤΖΑΚΑΣ ΜΙΧΑΗΛΗΣ
ΠΕΤΡΟΠΟΥΛΟΣ ΓΙΑΝΝΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ