

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1^ο

A. α) Να δώσετε τον ορισμό της ισότητας δύο συναρτήσεων.

5 μονάδες

β) Να δώσετε τον ορισμό της γνησίως αύξουσας συνάρτησης σ' ένα διάστημα Δ.

5 μονάδες

γ) Να δώσετε τον ορισμό της 1-1 συνάρτησης.

5 μονάδες

B. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να γράψετε το γράμμα Α, αν ο ισχυρισμός είναι αληθής και το γράμμα Ψ, αν ο ισχυρισμός είναι ψευδής, αιτιολογώντας συγχρόνως την απάντησή σας.

1. Αν $f(x) = \ln x$ και $g(x) = e^{-x}$, τότε

α) $(g \circ f)(x) = \frac{1}{x}, x \in \mathbb{R}^*$

β) $(f \circ g)(x) = -x, x \in \mathbb{R}$

2. Αν $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = l \in \mathbb{R}$, τότε $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$.

3. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$.

4. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = m$ με $l, m \in \mathbb{R}$ και $f(x) < g(x)$ κοντά στο x_0

τότε κατ' ανάγκη θα είναι:

α) $l < m$

β) $l \leq m$

γ) $l \geq m$

δ) $l = m$

ε) $m < l$

10 μονάδες

ΘΕΜΑ 2^ο

α) Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f(f(x)) = 4x + 12$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (1).

Να δείξετε ότι:

- η f είναι '1-1',
- ισχύει $f(4x + 12) = 4f(x) + 12$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

7 μονάδες

β) Να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση της $f(x) = \ln(e^x - 1)$, εφόσον υπάρχει.

10 μονάδες

γ) Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 + 1, x \in \mathbb{R}$.

- Να δείξετε ότι η f δεν είναι '1-1'.
- Να βρείτε το ελάχιστο της f .

8 μονάδες

ΘΕΜΑ 3^ο

α) Έστω η γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

- Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x) - x, x \in \mathbb{R}$, είναι γνησίως φθίνουσα.
- Να βρείτε κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει $e^{3\lambda - \lambda^2} - e^{6 - 2\lambda} = (\lambda^2 - 3\lambda) - (2\lambda - 6)$ (1)

10 μονάδες

β) Να υπολογίσετε τα όρια:

- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$
- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x + 2} - 2}{x - 2}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 2x}{x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x + \eta\mu 4x}{\eta\mu 2x + \eta\mu 8x}$

8 μονάδες

γ) Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^2(x) \leq 2f(x)\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (1).

Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x)$.

7 μονάδες

ΘΕΜΑ 4^ο

α) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - x \cdot \eta\mu^2 x}{x^3 - \eta\mu^3 x} = l$.

8 μονάδες

β) Έστω οι γνησίως αύξουσες συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύουν οι σχέσεις: $f \circ f = g \circ g$ (1) και $f \circ g = g \circ f$ (2)

Να δείξετε ότι $f = g$.

7 μονάδες

γ) Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι: $f^3(x) + f(x) + 1 = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

i. Να δείξετε ότι $|f(x)| \leq |x - 1|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

5 μονάδες

ii. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

5 μονάδες

**ΟΙ ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ ΚΑΘΩΣ ΚΑΙ ΟΙ ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ ΘΑ
ΒΡΙΣΚΟΝΤΑΙ ΣΤΗΝ ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΤΟΥ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟΥ ΜΑΣ**

www.apolito.gr

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΘΕΜΑΤΩΝ
ΜΠΑΤΖΑΚΑΣ ΜΙΧΑΗΛΗΣ
ΠΕΤΡΟΠΟΥΛΟΣ ΓΙΑΝΝΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Θεωρία Σχολικού

B.

1. Ψ, Α
2. Α
3. Α
4. β

ΘΕΜΑ 2^ο

α) i) Με $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ και $f(x_1) = f(x_2)$ βρίσκουμε:

$$f(f(x_1)) = f(f(x_2)) \xrightarrow{(i)} 4x_1 + 12 = 4x_2 + 12 \Leftrightarrow x_1 = x_2.$$

ii) Θέτουμε στην (1) όπου x το $f(x)$ και έχουμε:

$$f(f(f(x))) = 4f(x) + 12 \xrightarrow{(i)} f(4x + 12) = 4f(x) + 12.$$

β) Ισχύει $D_f = \{x \in \mathbb{R} / e^x - 1 > 0\} = (0, +\infty)$.

Έστω y τυχαίο στοιχείο του συνόλου τιμών $f((0, +\infty))$ της f .

Θεωρούμε την εξίσωση $f(x) = y$ ως προς $x \in D_f$. Τη λύνουμε και έχουμε:

$$f(x) = y \Leftrightarrow \ln(e^x - 1) = y, x > 0, y \in ((0, +\infty))$$

$$\Leftrightarrow e^x - 1 = e^y, x > 0, y \in ((0, +\infty))$$

$$\Leftrightarrow x = \ln(e^y + 1), x > 0, y \in ((0, +\infty))$$

Άρα έχουμε:

- Επειδή το x εκφράζεται μονοσήμαντα συναρτήσει του y , αφού $x = \ln(e^y + 1)$, η συνάρτηση f είναι '1-1', άρα έχει αντίστροφη, έστω την f^{-1} .
- Οι περιορισμοί για το y είναι:
 $e^y + 1 > 0$ και $x = \ln(e^y + 1) > 0$
 $\Leftrightarrow e^y > -1$ και $e^y + 1 > 1$, που ισχύουν
 $\Leftrightarrow y \in \mathbb{R}$.
 Οπότε $f((0, +\infty)) = \mathbb{R}$.
- Από τα παραπάνω έχουμε $x = \ln(e^y + 1), y \in \mathbb{R}$, δηλαδή
 $f^{-1}(y) = \ln(e^y + 1), y \in \mathbb{R}$, οπότε: $f^{-1}(x) = \ln(e^x + 1), x \in \mathbb{R}$.

γ) Ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = x^2(x^2 - 2x + 1) + 1 \Leftrightarrow f(x) = x^2(x-1)^2 + 1 \quad (1).$$

i) Από την (1) έχουμε $f(0) = f(1) = 1$. Άρα η f δεν είναι '1-1'.

ii) Από την (1) έχουμε: $f(x) \geq 0 + 1 = 1 = f(0)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άρα η f έχει ελάχιστο το 1.

ΘΕΜΑ 3^ο

α) i) Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, με $x_1 < x_2$. Ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$, αφού f γνησίως φθίνουσα,

και $-x_1 > -x_2$. Άρα προσθέτοντας κατά μέλη βρίσκουμε:

$$f(x_1) - x_1 > f(x_2) - x_2, \text{ δηλαδή } g(x_1) > g(x_2).$$

Οπότε η g είναι γνησίως φθίνουσα.

ii) Ισχύει:

$$(1) \Leftrightarrow e^{-(\lambda^2 - 3\lambda)} - (\lambda^2 - 3\lambda) = e^{-(\lambda^2 - 6)} - (2\lambda - 6) \xLeftrightarrow[f \downarrow]{f(x)=e^{-x}}$$

$$\Leftrightarrow g(\lambda^2 - 3\lambda) = g(2\lambda - 6) \xLeftrightarrow[g^{-1-1'}]{g \downarrow}$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda = 2\lambda - 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 2, \lambda = 3$$

β) Τα όρια είναι της απροσδιόριστης μορφής $\frac{0}{0}$. Με ειδικό τέχνασμα στο κάθε ένα,

για άρση της απροσδιοριστίας, έχουμε:

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x + 1) = 3$$

$$\text{ii. } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x+2} - 2)(\sqrt{x+2} + 2)}{(x-2)(\sqrt{x+2} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2-4}{(x-2)(\sqrt{x+2} + 2)} = \frac{1}{\sqrt{x+2} + 2} = \frac{1}{4}$$

$$\text{iii. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(2 \frac{\eta\mu 2x}{2x} \right) \stackrel{u=2x}{=} \lim_{u \rightarrow 0} \left(2 \frac{\eta\mu u}{u} \right) = 2$$

$$\text{iv. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x + \eta\mu 4x}{\eta\mu 2x + \eta\mu 8x} \stackrel{x}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\eta\mu x}{x} + \frac{\eta\mu 4x}{x}}{\frac{\eta\mu 2x}{x} + \frac{\eta\mu 8x}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\eta\mu x}{x} + 4 \frac{\eta\mu 4x}{4x}}{2 \frac{\eta\mu 2x}{2x} + 8 \frac{\eta\mu 8x}{8x}} = \frac{1 + 4 \cdot 1}{2 \cdot 1 + 8 \cdot 1} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

γ) Η (1) γράφεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$ διαδοχικά:

$$f^2(x) - 2f(x)\eta\mu x \leq \sigma\upsilon\nu^2 x - \eta\mu^2 x$$

$$f^2(x) - 2f(x)\eta\mu x + \eta\mu^2 x \leq \sigma\upsilon\nu^2 x$$

$$(f(x) - \eta\mu x)^2 \leq \sigma\upsilon\nu^2 x$$

$$|f(x) - \eta\mu x| \leq |\sigma\upsilon\nu x|$$

$$-|\sigma\upsilon\nu x| \leq f(x) - \eta\mu x \leq |\sigma\upsilon\nu x|$$

$$\eta\mu x - |\sigma\upsilon\nu x| \leq f(x) \leq \eta\mu x + |\sigma\upsilon\nu x| \quad (2)$$

Για τη (2) έχουμε $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\eta\mu x - |\sigma\upsilon\nu x|) = 1$ και $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\eta\mu x + |\sigma\upsilon\nu x|) = 1$.

Άρα από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε και $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = 1$.

ΘΕΜΑ 4^ο

α) Ισχύει: $l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{x^3} - \frac{x\eta\mu^2 x}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3} - \frac{\eta\mu^3 x}{x^3}}$ (δαιρέσαμε αριθμητή-παρανομαστή με x^3).

$$\text{ή: } l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2}{1 - \left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(1 - \frac{\eta\mu x}{x}\right) \cdot \left(1 + \frac{\eta\mu x}{x}\right)}{\left(1 - \frac{\eta\mu x}{x}\right) \left[1 + \left(\frac{\eta\mu x}{x}\right) + \left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2\right]}$$

$$\text{άρα: } l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{\eta\mu x}{x}}{1 + \frac{\eta\mu x}{x} + \left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2} = \frac{1+1}{1+1+1^2} = \frac{2}{3}.$$

β) Με επαγωγή σε άτοπο, θεωρούμε ότι υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$, ώστε

$$f(x_0) \neq g(x_0).$$

Έστω ότι $f(x_0) > g(x_0)$ (3), και ανάλογα βρίσκουμε αν $f(x_0) < g(x_0)$.

Ισχύει από την (3):

$$f(x_0) > g(x_0) \xrightarrow{f \uparrow} f(f(x_0)) > f(g(x_0))$$

$$\stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} g(g(x_0)) > g(f(x_0))$$

$$\stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} \stackrel{g \uparrow}{g(x_0)} > f(x_0), \text{ άτοπο από την 3.}$$

γ) i) Από την υπόθεση έχουμε για κάθε $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) \cdot (f^2(x) + 1) = x - 1, \text{ άρα } f(x) = \frac{x-1}{f^2(x)+1}, \text{ οπότε}$$

$$|f(x)| = \left| \frac{x-1}{f^2(x)+1} \right| = \frac{|x-1|}{f^2(x)+1} \leq \frac{|x-1|}{1} = |x-1|.$$

ii) Από το ερώτημα (i) βρίσκουμε: $-|x-1| \leq f(x) \leq |x-1|$ (1)

Κι επειδή $\lim_{x \rightarrow 1} (-|x-1|) = 0 = \lim_{x \rightarrow 1} |x-1|$, η σχέση (1) από το κριτήριο

παρεμβολής μας δίνει και $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$.

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ
ΜΠΑΤΖΑΚΑΣ ΜΙΧΑΛΗΣ
ΠΕΤΡΟΠΟΥΛΟΣ ΓΙΑΝΝΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ