

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1^ο

A1. Να διατυπωθεί και να δοθεί η γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού.

(6 μονάδες)

A2. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν η f είναι συνεχής στο Δ και $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ν' αποδείξετε ότι f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ .

(10 μονάδες)

B. Στις προτάσεις B1 και B2 να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

B1. Έστω x_0 εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης f , η οποία είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό.

A. Η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 αν και μόνο αν $f'(x_0) = 0$.

B. Αν $f'(x_0) \neq 0$, τότε η f δεν παρουσιάζει τοπικό στο x_0 .

Γ. Αν $f'(x_0) = 0$, τότε η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό ακρότατο.

(3 μονάδες)

B2. Έστω η συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 εσωτερικό σημείο του Δ .

A. Αν η f είναι συνεχής στο x_0 , τότε είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

B. Αν η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε δεν είναι συνεχής στο x_0 .

Γ. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε δεν είναι συνεχής στο x_0 .

Δ. Αν η f δεν είναι συνεχής στο x_0 , τότε δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

(3 μονάδες)

Γ. Έστω η συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) .

Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με την ένδειξη Σωστό ή Λάθος.

1. Υπάρχει πάντα $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $A(x_0, f(x_0))$ να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

2. Αν $f(\alpha) = f(\beta)$ υπάρχει πάντα $x_0 \in (\alpha, \beta)$ στο οποίο η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο.

(3 μονάδες)

ΘΕΜΑ 2^ο

Έστω f, g συναρτήσεις δύο φορές παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ τέτοιες ώστε:

$$f(2) = g(2), f(1) = g(1) + 1 \text{ και για κάθε } x \in \mathbb{R}, f''(x) = g''(x).$$

Δείξτε ότι:

i. $g(x) = f(x) + x - 2, x \in \mathbb{R}$

(9 μονάδες)

ii. Αν ρ_1, ρ_2 με $\rho_1 < 2 < \rho_2$ ρίζες της f τότε η g έχει μια ρίζα στο (ρ_1, ρ_2) .
(8 μονάδες)

iii. Αν x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ ρίζες της g τότε η εξίσωση $f'(x) + 1 = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (x_1, x_2) .

(8 μονάδες)

ΘΕΜΑ 3^ο

A. i) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και τα κοίλα η συνάρτηση f με

$$f(x) = a^x - x, x \in \mathbb{R} \text{ και } 0 < a < 1.$$

(6 μονάδες)

ii) Να βρεθούν οι πραγματικές τιμές του λ για τις οποίες ισχύει η ισότητα:

$$a^{\lambda^2-4} - a^{\lambda-2} = (\lambda^2 - 4) - (\lambda - 2), \text{ όπου } 0 < a < 1.$$

(6 μονάδες)

B. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 2x^2 + \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$.

i. Αν $A(x_1, f(x_1)), B(x_2, f(x_2)), \Gamma(x_3, f(x_3))$ είναι τοπικά ακρότατα της γραφικής παράστασης της f και $x_1 < x_2 < x_3$ να αποδείξετε ότι η ευθεία AB είναι κάθετη στην ευθεία $B\Gamma$.

(7 μονάδες)

ii. Αν $0 < \alpha < 1$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μια λύση στο $(-1, 0)$.

(6 μονάδες)

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f : [0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ για την οποία ισχύουν

i. $f(0) = 1$

ii. $f'(x) = \frac{8}{(2x+1)^2} - 1$

A. Να βρεθούν: α) Ο τύπος της συνάρτησης f . (8 μονάδες)

β) Οι θέσεις τοπικών ακρότατων και τα τοπικά ακρότατα της f . (6 μονάδες)

γ) Οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 0$. (4 μονάδες)

B. Ν' αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό x_0 τέτοιο ώστε $f(x_0) = -2004$. (7 μονάδες)

ΟΙ ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ ΚΑΘΩΣ ΚΑΙ ΟΙ ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ ΘΑ
ΒΡΙΣΚΟΝΤΑΙ ΣΤΗΝ ΙΣΤΙΟΣΕΛΙΔΑ ΤΟΥ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟΥ ΜΑΣ

www.apolito.gr

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΘΕΜΑΤΩΝ
ΜΠΑΤΖΑΚΑΣ ΜΙΧΑΛΗΣ
ΠΕΤΡΟΠΟΥΛΟΣ ΙΩΑΝΝΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

B. B1: B

B2: Δ

Γ. 1: Λάθος

2: Λάθος

ΘΕΜΑ 2^ο

i) Έχουμε ότι: $f''(x) = g''(x), x \in \mathbb{R}$ τότε

$$f'(x) = g'(x) + c \Leftrightarrow f'(x) = [g(x) + cx]', x \in \mathbb{R} \text{ τότε}$$

$$f(x) = g(x) + cx + c_1, x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Για } x = 1 \text{ έχουμε: } f(1) = g(1) + c + c_1 \Leftrightarrow g(1) + 1 = g(1) + c + c_1 \Leftrightarrow c + c_1 = 1$$

$$\text{Για } x = 2 \text{ έχουμε: } f(2) = g(2) + 2c + c_1 \Leftrightarrow c_1 = -2c$$

$$\text{άρα } c - 2c = 1 \Leftrightarrow c = -1$$

$$\text{και } c_1 = -2 \cdot (-1) = 2$$

$$\text{οπότε } f(x) = g(x) - x + 2 \Leftrightarrow g(x) = f(x) + x - 2, x \in \mathbb{R}$$

ii) Η g συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων

$$\left. \begin{aligned} g(\rho_1) &= f(\rho_1) + \rho_1 - 2 = \rho_1 - 2 < 0 \\ g(\rho_2) &= f(\rho_2) + \rho_2 - 2 = \rho_2 - 2 > 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow g(\rho_1) \cdot g(\rho_2) < 0$$

οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\rho_1, \rho_2)$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0$.

iii) Η g συνεχής στο $[x_1, x_2]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

Η g παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) με $g'(x) = f'(x) + 1$

$$g(x_1) = g(x_2) = 0$$

οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε

$$g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) + 1 = 0.$$

ΘΕΜΑ 3^ο

A. i) $f'(x) = \alpha^x \cdot \ln \alpha - 1 < 0, x \in \mathbb{R}$ αφού $\ln \alpha < 0, \alpha^x > 0$

άρα η f γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$

$$f''(x) = \alpha^x \cdot (\ln \alpha)^2 > 0, x \in \mathbb{R}$$

άρα η f κυρτή στο $\mathbb{R}$.

ii) Επειδή η f γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ είναι και "1-1" οπότε

$$\alpha^{\lambda^2-4} - \alpha^{\lambda-2} = (\lambda^2 - 4) - (\lambda - 2) \Leftrightarrow$$

$$\alpha^{\lambda^2-4} - (\lambda^2 - 4) = \alpha^{\lambda-2} - (\lambda - 2) \Leftrightarrow$$

$$f(\lambda^2 - 4) = f(\lambda - 2) \Leftrightarrow \lambda^2 - 4 = \lambda - 2 \text{ (επειδή η } f \text{ "1-1") } \Leftrightarrow$$

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1 \text{ ή } \lambda = 2.$$

B.i) $f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = \pm 1.$$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$4x$	-	-	+	+	
$x^2 - 1$	+	-	-	+	
$f'(x)$	-	+	-	+	
$f(x)$					

T.M.

$f(-1) = \alpha - 1$

T.E.

$f(0) = \alpha$

T.M.

$f(1) = \alpha - 1$

οπότε $A(-1, \alpha - 1), B(0, \alpha), \Gamma(1, \alpha - 1)$

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{AB} &= \frac{\alpha - \alpha + 1}{0 + 1} = 1 \\ \lambda_{B\Gamma} &= \frac{\alpha - 1 - \alpha}{1 - 0} = -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lambda_{AB} \cdot \lambda_{B\Gamma} = -1 \Leftrightarrow AB \perp B\Gamma$$

ii) Η f συνεχής στο $[-1, 0]$ ως πολωνυμική

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= \alpha > 0 \\ f(-1) &= \alpha - 1 < 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(0) \cdot f(-1) < 0$$

οπότε υπάρχει $x_0 \in (-1, 0)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$

Επειδή η f γνησίως αύξουσα στο $[-1,0]$ το x_0 μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$.

ΘΕΜΑ 4^ο

Α)α) Παρατηρώ ότι: $f'(x) = \left[-\frac{4}{2x+1} - x \right]', x \in [0, +\infty)$

τότε $f(x) = -\frac{4}{2x+1} - x + c, x \in [0, +\infty)$

Για $x = 0$ έχουμε $f(0) = -\frac{4}{1} - 0 + c \Leftrightarrow 1 + 4 = c \Leftrightarrow c = 5$

Άρα $f(x) = -\frac{4}{2x+1} - x + 5, x \in [0, +\infty)$.

$$\begin{aligned} \beta) f'(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{8}{(2x+1)^2} - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{8 - 4x^2 - 4x - 1}{(2x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow \\ &-4x^2 - 4x + 7 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{128}}{-8} \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{4 \pm 8\sqrt{2}}{-8} \Leftrightarrow \\ x = \frac{-1 - 2\sqrt{2}}{2} \text{ ή } x = \frac{2\sqrt{2} - 1}{2} &\text{ Απορρίπτεται} \end{aligned}$$

$$\Delta = 16 + 112 = 128$$

x	0	$\frac{2\sqrt{2}-1}{2}$	$+\infty$
$f'(x) = \frac{-4x^2 - 4x + 7}{(2x+1)^2}$		+	-
$f(x)$	T.E.	T.M.	

Άρα η f έχει τοπικό ελάχιστο το $f(0) = 1$ και μέγιστο το

$$f\left(\frac{2\sqrt{2}-1}{2}\right) = -\frac{4 \cdot 2}{2\sqrt{2}-1+1} - \frac{2\sqrt{2}-1}{2} + 5 = -\frac{2\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2} + \frac{1}{2} + 5 = -2\sqrt{2} + \frac{11}{2}.$$

$$\gamma) f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-4}{2x+1} - x + 5 = 0 \Leftrightarrow -4 - 2x^2 - x + 10x + 5 = 0 \Leftrightarrow$$

$$2x^2 - 9x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{9 + \sqrt{89}}{4} \text{ ή } x = \frac{9 - \sqrt{89}}{4} \text{ Απορρίπτεται}$$

$$\Delta = 81 + 8 = 89$$

Β) Για $x \in [0, 1]$ η f έχει σύνολο τιμών το $\left[1, \frac{11}{2} - 2\sqrt{2}\right]$ επειδή

$-2004 \notin \left[1, \frac{11}{2} - 2\sqrt{2}\right]$ η $f(x) = -2004$ είναι αδύνατη στο $[0, 1]$.

Για $x \in [1, +\infty)$ η f έχει σύνολο τιμών το

$$\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \frac{11}{2} - 2\sqrt{2}\right) = \left(-\infty, \frac{11}{2} - 2\sqrt{2}\right]$$

επειδή $-2004 \in \left(-\infty, \frac{11}{2} - 2\sqrt{2}\right]$ υπάρχει $x_0 \in (1, +\infty)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = -2004$

το οποίο είναι μοναδικό αφού η f γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$.

**ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ
ΜΠΑΤΖΑΚΑΣ ΜΙΧΑΛΗΣ
ΠΕΤΡΟΠΟΥΛΟΣ ΙΩΑΝΝΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ**