

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1^ο

A1. Πότε μια συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω σε ένα διάστημα Δ ;
(7 μονάδες)

A2. Πότε η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f λέμε ότι έχει:

α) κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $x = x_0$; (3 μονάδες)

β) ασύμπτωτη την ευθεία $y = \lambda x + \beta$ στο $+\infty$; (3 μονάδες)

B1. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις σημειώνοντας στο γραπτό σας το αντίστοιχο γράμμα Σ (σωστό) ή Λ (λάθος).

α) Αν η συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και στρέφει τα κοίλα προς τα άνω στο Δ , τότε ισχύει $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$.

β) Αν η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω στο διάστημα Δ , τότε η f δεν είναι αντιστρέψιμη.

γ) Αν οι συναρτήσεις f και g στρέφουν τα κοίλα προς τα άνω στο διάστημα Δ , τότε η συνάρτηση $f + g$ στρέφει τα κοίλα προς τα άνω στο Δ .

δ) Αν η $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη, με $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ τότε η f είναι σταθερή.

(12 μονάδες)

ΘΕΜΑ 2^ο

Έστω η συνάρτηση f που είναι ορισμένη και συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) και για την οποία ισχύει

$$f'(x) \leq 4 \text{ για κάθε } x \in (\alpha, \beta)$$

Αν δίνεται ότι: $f(\beta) = \beta^2 + 4$ και $f(\alpha) = 6\alpha - \alpha^2 - 1$

τότε να δείξετε ότι: α) $\alpha = 1$ και $\beta = 2$, (12 μονάδες)

β) $f(x) = 4x$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ (13 μονάδες)

ΘΕΜΑ 3^ο

A. α) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} g(x), & \alpha \leq x \leq x_0 \\ h(x), & \alpha < x < x_0 \end{cases}$ όπου οι συναρτήσεις g και h

είναι παραγωγίσιμες στο σημείο x_0 .

Να βρείτε τις συνθήκες για τις οποίες η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

(4 μονάδες)

β) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β και γ για τους οποίους η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha}{x^2}, & \alpha \leq x \leq 1 \\ \beta x^2 + \gamma x + 1, & \alpha < x < 1 \end{cases}$$
 είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 1$.

(8 μονάδες)

B. α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$e^x + e^{2x} + e^{-3x} \geq 3 \quad (5 \text{ μονάδες})$$

β) Αν $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ είναι θετικοί αριθμοί και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\alpha_1^x + \alpha_2^x + \dots + \alpha_n^x \geq n \quad (n \in \mathbb{N}^*),$$

να αποδείξετε ότι $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \dots \cdot \alpha_n = 1$ (8 μονάδες)

ΘΕΜΑ 4^ο

A. α) Θεωρούμε τη δυο φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f'(\beta) > 0$, $f'(\alpha) < 0$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, που $f''(x_0) > 0$.

(4 μονάδες)

β) Δίνεται η δυο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ και $f(\gamma) > 0$, όπου $\alpha < \gamma < \beta$. Να δειχθεί ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, που $f''(x_0) < 0$.

(3 μονάδες)

Β. Δίνεται η συνάρτηση f δυο φορές παραγωγίσιμη στο $[1, e]$ με $f(1) = 2$ και $f(e) = e + 1$ και σύνολο τιμών $[-1, 4]$. Να αποδείξετε ότι:

Ι. α) Υπάρχουν τουλάχιστον δυο τιμές $x_1, x_2 \in (1, e)$ με $x_1 \neq x_2$ ώστε $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$.

(4 μονάδες)

β) Υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (1, e)$ τέτοιο ώστε

$$f(x_0) \cdot [f'(x_0) - 4f^4(x_0)] = x_0$$

(5 μονάδες)

ΙΙ. α) Η ευθεία $y = -x + e + 2$ τέμνει τη γραφική παράσταση της f σ' ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $c_0 \in (1, e)$.

(5 μονάδες)

β) Υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (1, e)$ με $\xi_1 \neq \xi_2$ τέτοιοι ώστε να ισχύει $f'(\xi_1) \cdot f'(\xi_2) = 1$.

(4 μονάδες)

**ΟΙ ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ ΚΑΘΩΣ ΚΑΙ ΟΙ ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ ΘΑ
ΒΡΙΣΚΟΝΤΑΙ ΣΤΗΝ ΙΣΤΙΟΣΕΛΙΔΑ ΤΟΥ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟΥ ΜΑΣ**

www.apolito.gr

**ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΘΕΜΑΤΩΝ
ΜΠΑΤΖΑΚΑΣ ΜΙΧΑΛΗΣ
ΠΕΤΡΟΠΟΥΛΟΣ ΙΩΑΝΝΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ**

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

A.1, A.2 Θεωρία σχολικού βιβλίου

B.1 α) Λ

β) Λ

γ) Σ

δ) Λ

ΘΕΜΑ 2^ο

A. α) Από το Θ.Μ.Τ. για την f στο $[\alpha, \beta]$ υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$, ώστε

$$\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = f'(\xi) \leq 4 \quad (\text{υπόθεση})$$

$$\text{άρα } f(\beta) - f(\alpha) \leq 4(\beta - \alpha)$$

$$\text{δηλαδή } \beta^2 + 4 - 6\alpha + \alpha^2 + 1 \leq 4\beta - 4\alpha \quad (\text{υπόθεση})$$

$$\text{οπότε } \beta^2 - 4\beta + 4 + \alpha^2 - 2\alpha + 1 \leq 0$$

$$\text{ή } (\beta - 2)^2 + (\alpha - 1)^2 \leq 0 \quad (1)$$

Και επειδή $(\beta - 2)^2 + (\alpha - 1)^2 \geq 0$, η (1) μας δίνει:

$$(\beta - 2)^2 + (\alpha - 1)^2 = 0$$

$$\text{οπότε } \beta = 2 \quad \text{και} \quad \alpha = 1$$

β) Από το ερώτημα (α) έχουμε: $\alpha = 1$ και $\beta = 2$ και από την υπόθεση

$$f(\alpha) = 6\alpha - \alpha^2 - 1 = 4 \quad \text{και} \quad f(\beta) = \beta^2 + 4 = 8 \quad (2)$$

Έστω $x \in (\alpha, \beta)$. Τότε από το Θ.Μ.Τ. για την f στα διαστήματα $[\alpha, x]$ και $[x, \beta]$ βρίσκουμε διαδοχικά:

$$\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = f'(\xi_1) \leq 4 \quad \text{και} \quad \frac{f(\beta) - f(x)}{\beta - x} = f'(\xi_2) \leq 4$$

$$\frac{f(x) - 4}{x - 1} \leq 4 \quad \text{και} \quad \frac{8 - f(x)}{2 - x} \leq 4$$

$$f(x) - 4 \leq 4x - 4 \quad \text{και} \quad 8 - f(x) \leq 8 - 4x$$

$$f(x) \leq 4x \quad \text{και} \quad 4x \leq f(x)$$

$$f(x) = 4x \Leftrightarrow f(x) = 4x, x \in [\alpha, \beta].$$

ΘΕΜΑ 3^ο

Α.α) Αρχικά η f πρέπει να είναι συνεχής στο σημείο x_0 , δηλαδή

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0) \text{ ή } \lim_{x \rightarrow x_0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} h(x) = f(x_0)$$

ή $g(x_0) = h(x_0)$ [οι g και h είναι συνεχής στο x_0 ως παραγωγίσιμες].

Για $x \neq x_0$ έχουμε:

$$\lambda(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \begin{cases} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}, & \alpha \nu x > x_0 \\ \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0}, & \alpha \nu x < x_0 \end{cases}$$

Για να είναι παραγωγίσιμη η f στο σημείο x_0 , πρέπει και αρκεί να ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \lambda(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \lambda(x) \in \mathbb{R} \text{ ή } \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0}$$

ή $g'(x_0) = h'(x_0)$.

Άρα λοιπόν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , αν και μόνο αν ισχύει $g(x_0) = h(x_0)$ και $g'(x_0) = h'(x_0)$.

β) Οι συναρτήσεις $g(x) = \frac{\alpha}{x^2}$ και $h(x) = \beta x^2 + \gamma x + 1$ είναι παραγωγίσιμες με

$$g'(x) = \frac{-2\alpha}{x^3} \text{ και } h'(x) = 2\beta x + \gamma.$$

- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$, αν και μόνο αν ισχύει

$$g(1) = h(1) \text{ και } g'(1) = h'(1), \text{ δηλαδή } \alpha = \beta + \gamma + 1 \quad (1) \text{ και } -2\alpha = 2\beta + \gamma \quad (2).$$

- Όταν ισχύουν οι (1) και (2), τότε έχουμε

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{2\alpha}{x^3}, & x \geq 1 \\ 2\beta x + \gamma, & x < 1 \end{cases}.$$

Η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$, όταν η f' είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$. Αυτό συμβαίνει όταν $g'(1) = h'(1)$ και $g''(1) = h''(1)$.

Επειδή $g''(x) = \frac{6\alpha}{x^4}$ και $h''(x) = 2\beta$, η ισότητα $g''(1) = h''(1)$ γράφεται $6\alpha = 2\beta$, δηλαδή $\beta = 3\alpha$ (3).

Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων (1), (2) και (3), βρίσκουμε

$$\alpha = \frac{1}{6}, \beta = \frac{1}{2} \text{ και } \gamma = -\frac{4}{3}.$$

Β. α) Αρκεί να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση $f(x) = e^x + e^{2x} + e^{-3x}$ ($x \in \mathbb{R}$) έχει ελάχιστο το 3.

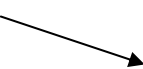
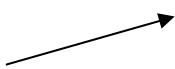
Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x + 2e^{2x} - 3e^{-3x} = e^x + 2e^{2x} - \frac{3}{e^{3x}} = \frac{2e^{5x} + e^{4x} - 3}{e^{3x}} = \frac{2(e^{5x} - 1) + (e^{4x} - 1)}{e^{3x}} = \\ &= \frac{2(e^x - 1) \cdot (e^{4x} + e^{3x} + e^{2x} + e^x + 1) + (e^x - 1) \cdot (e^{3x} + e^{2x} + e^x + 1)}{e^{3x}} = \\ &= \frac{(e^x - 1) \cdot (2e^{4x} + 3e^{3x} + 3e^{2x} + 3e^x + 3)}{e^{3x}}. \end{aligned}$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $e^{3x} > 0$ και $2e^{4x} + 3e^{3x} + 3e^{2x} + 3e^x + 3 > 0$.

Επομένως η $f'(x)$ έχει το πρόσημο του $e^x - 1$.

Άρα η f έχει ελάχιστο το $f(0) = e^0 + e^0 + e^0 = 3$ και επομένως για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) \geq 3$.

x	$-\infty$		0	$+\infty$
$f'(x)$		-		+
$f(x)$				
			ελ.	

β) Η συνάρτηση $f(x) = \alpha_1^x + \alpha_2^x + \dots + \alpha_n^x$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x) = \alpha_1^x \ln \alpha_1 + \alpha_2^x \ln \alpha_2 + \dots + \alpha_n^x \ln \alpha_n.$$

Επειδή $f(x) \geq n$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, η f έχει ελάχιστο το n και είναι

$$f(0) = \alpha_1^0 + \alpha_2^0 + \dots + \alpha_n^0 = n.$$

Σύμφωνα με το θεώρημα του Fermat, προκύπτει ότι

$$f'(0) = 0 \text{ ή } \ln \alpha_1 + \ln \alpha_2 + \dots + \ln \alpha_n = 0 \text{ ή } \ln(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n) = 0 \text{ ή } \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n = 1.$$

ΘΕΜΑ 4^ο

Α.α) Η f' είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ ως παραγωγίσιμη και ισχύει

$f'(\alpha)f'(\beta) < 0$. Άρα υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, που $f'(\xi) = 0$. Το θεώρημα μέσης τιμής ισχύει για την συνάρτηση f' στο διάστημα $[\xi, \beta]$. Άρα υπάρχει $x_0 \in (\xi, \beta)$ τέτοιο που

$$f''(x_0) = \frac{f'(\beta) - f'(\xi)}{\beta - \xi} = \frac{f'(\beta) - 0}{\beta - \xi} = \frac{f'(\beta)}{\beta - \xi} > 0.$$

β) Το θεώρημα της μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού εφαρμόζεται για τη συνάρτηση f στα διαστήματα $[\alpha, \gamma]$ και $[\gamma, \beta]$. Επομένως υπάρχουν

$\xi_1 \in (\alpha, \gamma)$ και $\xi_2 \in (\gamma, \beta)$ για τους οποίους ισχύουν:

$$f'(\xi_1) = \frac{f(\gamma) - f(\alpha)}{\gamma - \alpha} = \frac{f(\gamma) - 0}{\gamma - \alpha} > 0 \text{ και}$$

$$f'(\xi_2) = \frac{f(\beta) - f(\gamma)}{\beta - \gamma} = \frac{0 - f(\gamma)}{\beta - \gamma} < 0.$$

Θεωρούμε το διάστημα $[\xi_1, \xi_2]$ (προφανώς είναι $\xi_2 > \xi_1$). Το θεώρημα μέσης τιμής εφαρμόζεται για τη συνάρτηση f' στο διάστημα $[\xi_1, \xi_2]$. Άρα υπάρχει

ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\xi_1, \xi_2)$ τέτοιο, που $f''(x_0) = \frac{f'(\xi_2) - f'(\xi_1)}{\xi_2 - \xi_1}$. Είναι,

όμως, $f'(\xi_2) < 0$, $-f'(\xi_1) < 0$ και $\xi_2 - \xi_1 > 0$. Άρα είναι $f''(x_0) < 0$.

Β.Ι)α) Προφανώς $-1 = m$, $4 = M$ άρα λόγω θεωρήματος μέγιστης-ελάχιστης τιμής θα υπάρχουν $x_1, x_2 \in (1, e)$ με $x_1 \neq x_2$ (επειδή $f(1) = 2, f(e) = e + 1$) τέτοια ώστε $f(x_1) = m = -1$ και $f(x_2) = M = 4$.

Λόγω Θεωρήματος Fermat: $f'(x_1) = 0$ και $f'(x_2) = 0$.

β) Θεωρούμε $g(x) = f(x)[f'(x) - 4f^4(x)] - x$ και εφαρμόζουμε θεώρημα Bolzano στο $[x_1, x_2]$ ή $[x_2, x_1]$.

$$g(x_1) = f(x_1)[f'(x_1) - 4f^4(x_1)] - x_1 = -1[0 - 4(-1)^4] - x_1 = 4 - x_1 > 0 \text{ επειδή } x_1 \in (1, e)$$

$$g(x_2) = f(x_2)[f'(x_2) - 4f^4(x_2)] - x_2 = 4[0 - 4 \cdot 4^4] - x_2 = -4^6 - x_2 < 0$$

Άρα θα υπάρξει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (x_1, x_2)$ ή $(x_2, x_1) \subseteq (1, e)$ τέτοιο ώστε

$$g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0)[f'(x_0) - 4f^4(x_0)] = x_0.$$

Π)α) Θεωρούμε $g(x) = f(x) + x - e - 2$.

$$g(1) = 2 + 1 - e - 2 = 1 - e < 0$$

$$g(e) = e + 1 - e - e - 2 = e - 1 > 0$$

Άρα αν εφαρμόσουμε το θεώρημα Bolzano στο $[1, e]$ θα καταλήξουμε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $c_0 \in (1, e)$ τέτοιο ώστε

$$g(c_0) = 0 \Leftrightarrow f(c_0) = -c_0 + e + 2$$



β)

Αν εφαρμόσουμε το Θεώρημα μέσης τιμής διαφορικού λογισμού στα διαστήματα $[1, c_0]$ και $[c_0, e]$ θα καταλήξουμε ότι υπάρχουν δύο τουλάχιστον

ξ_1, ξ_2 με $\xi_1 \in (1, c_0)$ και $\xi_2 \in (c_0, e)$ τέτοια ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(c_0) - f(1)}{c_0 - 1} = \frac{-c_0 + e + 2 - 2}{c_0 - 1} = \frac{-c_0 + e}{c_0 - 1}$$

$$f'(\xi_2) = \frac{f(e) - f(c_0)}{e - c_0} = \frac{e + 1 + c_0 - e - 2}{e - c_0} = \frac{c_0 - 1}{e - c_0}$$

$$\text{Προφανώς } f'(\xi_1) \cdot f'(\xi_2) = \frac{e - c_0}{c_0 - 1} \cdot \frac{c_0 - 1}{e - c_0} = +1$$

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ
ΜΠΑΤΖΑΚΑΣ ΜΙΧΑΗΛΗΣ
ΠΕΤΡΟΠΟΥΛΟΣ ΙΩΑΝΝΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ