

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1^ο

- A.** Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ . Να δείξετε ότι αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ .
10 ΜΟΝΑΔΕΣ
- B.** i. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;
2 ΜΟΝΑΔΕΣ
- ii. Πότε μια συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού το A , θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο;
3 ΜΟΝΑΔΕΣ
- Γ.** Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ).
- i. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$, τότε η f δεν έχει τοπικό ακρότατο στο Δ .
- ii. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και γνησίως φθίνουσα σ' αυτό, τότε το σύνολο τιμών της f στο $[\alpha, \beta]$ είναι το διάστημα $[f(\alpha), f(\beta)]$.
- iii. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$ και δε μηδενίζεται σ' αυτό, τότε $f(\alpha) \cdot f(\beta) > 0$.
- iv. Αν μια συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 , τότε δεν είναι συνεχής στο x_0 .
- v. Αν μια συνάρτηση f δεν είναι $\ll 1 - 1 \gg$ σε ένα διάστημα Δ , τότε δεν είναι και γνησίως μονότονη στο Δ .
10 ΜΟΝΑΔΕΣ

ΘΕΜΑ 2^ο

Έστω $\left| \frac{2z-1}{z+2} \right| = 3$ και $z \neq -2$.

- i. Να δείξετε ότι η εικόνα του z στο μιγαδικό επίπεδο κινείται σε κύκλο με κέντρο $K(-4, 0)$ και ακτίνα $\rho = 3$.
8 ΜΟΝΑΔΕΣ
- ii. Να βρείτε το μιγαδικό z που έχει το μέγιστο μέτρο, καθώς και αυτόν που έχει το ελάχιστο μέτρο.
8 ΜΟΝΑΔΕΣ
- iii. Αν η εικόνα του μιγαδικού w στο μιγαδικό επίπεδο κινείται στην ευθεία με εξίσωση $x + y - 4 = 0$, να βρείτε το ελάχιστο του $|z - w|$.
9 ΜΟΝΑΔΕΣ

ΘΕΜΑ 3^ο

- A.** Έστω μια συνάρτηση $f(x) = e^{2x} - 4x^2$, $x \in \mathbb{R}$. Να μελετήσετε την f ως προς:
- i. Την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής
5 ΜΟΝΑΔΕΣ
- ii. Τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της
7 ΜΟΝΑΔΕΣ

- B.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 24x - 12$, $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε:
- i. Τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης 8 ΜΟΝΑΔΕΣ
 - ii. Το $f(\Delta)$, όπου $\Delta = [-2, 3]$ 5 ΜΟΝΑΔΕΣ

ΘΕΜΑ 4^ο

A. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς κ, λ ισχύει $e^{4\kappa-\lambda} = \kappa$, να βρείτε τη μικρότερη δυνατή τιμή του λ . 8 ΜΟΝΑΔΕΣ

B. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f(x) \geq \frac{f(1)+f(0)}{2} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Να δείξετε ότι:

- i. Η συνάρτηση f δεν είναι " $1 - 1$ " 5 ΜΟΝΑΔΕΣ
- ii. Η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει τουλάχιστον 3 διαφορετικές πραγματικές λύσεις 6 ΜΟΝΑΔΕΣ
- iii. Αν $f(0) > 0$ και η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, τότε να δείξετε ότι η εξίσωση $f''(x) \cdot f(x) = [f'(x)]^2$ έχει τουλάχιστον δύο πραγματικές ρίζες.

6 ΜΟΝΑΔΕΣ

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

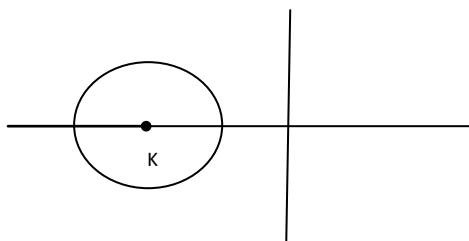
ΘΕΜΑ 1^ο

Γ. i. Λ, ii. Λ, iii. Σ, iv. Λ, v. Σ

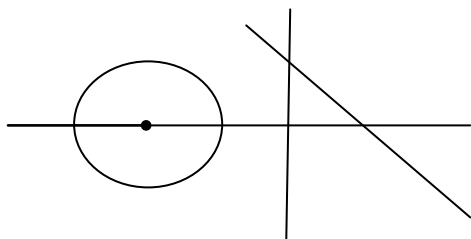
ΘΕΜΑ 2^ο

A. i. $|2z - 1| = |z + 2| \Leftrightarrow \sqrt{(2x-1)^2 + (2y)^2} = 3\sqrt{(x+2)^2 + y^2} \Leftrightarrow$
 $4x^2 - 4x + 1 + 4y^2 = 9x^2 + 36x + 36 + 9y^2 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 5x^2 + 5y^2 + 40x + 35 = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 8x + 7 = 0 \Leftrightarrow (x+4)^2 + y^2 = 3^2$
 Άρα κύκλος με κέντρο $K(-4, 0)$, $R = 3$

ii. $\min \rightarrow z = -1 + 0i$ $\max \rightarrow z = -7 + 0i$



iii. $|z - w| \min = d(K, \varepsilon) - R = \frac{|-4+0-4|}{\sqrt{1^2+1^2}} - 3 = \frac{8}{\sqrt{2}} - 3 = 4\sqrt{2} - 3$



ΘΕΜΑ 3^ο

A. i. $f'(x) = 2e^{2x} - 8x$, $f''(x) = 4e^{2x} - 8$
 $f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^{2x} \geq 2 \Leftrightarrow 2x \geq \ln 2 \Leftrightarrow x \geq \frac{\ln 2}{2}$

x	$-\infty$	$\frac{\ln 2}{2}$	$+\infty$
$f''(x)$		-	+
$f(x)$			

$$\begin{aligned}
 f\left(\frac{\ln 2}{2}\right) &= \\
 e^{\ln 2} - 4 \frac{(\ln 2)^2}{4} &= \\
 &= 2 - (\ln 2)^2
 \end{aligned}$$

ii. $f' \downarrow$ στο $(-\infty, \frac{\ln 2}{2}]$

$$f'\left(\frac{\ln 2}{2}\right) = 2e^{\ln 2} - 8 \frac{\ln 2}{2} = 4(1 - \ln 2) > 0$$

Άρα $f'(x) > 0$ στο $(-\infty, \frac{\ln 2}{2}]$

$f' \uparrow$ στο $[\frac{\ln 2}{2}, +\infty)$ άρα $f'(x) > 0$ στο $[\frac{\ln 2}{2}, +\infty)$

Άρα $f'(x) > 0$ άρα $f \uparrow$ στο $\mathbb{R}$

$$f(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$$

Αφού

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[e^{2x} \left(1 - \frac{4x^2}{e^{2x}} \right) \right] = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2}{e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8x}{2e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8}{4e^{2x}} = 0$$

B. i. $f'(x) = 12x^3 - 24x^2 - 12x + 24$

$$= 12(x^3 - 2x^2 - x + 2) = 12(x-1)(x-2)(x+1)$$

x	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$		
$f'(x)$	$-$		$+$		$-$		$+$
$f(x)$							

$$f(-2) = 28, \quad f(-1) = -31, \quad f(1) = 1, \quad f(2) = -4, \quad f(3) = 33$$

ii. $\Sigma.T. = [-31, 33]$

ΘΕΜΑ 4^ο

A. Προφανώς $K > 0$

$$e^{4\kappa - \lambda} = \kappa \Leftrightarrow 4\kappa - \lambda = \ln \kappa \Leftrightarrow \lambda = 4\kappa - \ln \kappa$$

$$\lambda = f(\kappa) = 4\kappa - \ln \kappa$$

$$f'(\kappa) = 4 - \frac{1}{\kappa} = \frac{4\kappa - 1}{\kappa}$$

κ	0	$1/4$	$+\infty$
$f'(\kappa)$		$\circ$	
$f(\kappa)$			

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = 1 - \ln \frac{1}{4} = 1 + \ln 4 = \lambda_{\min}$$

$$\text{B. i. } \left. \begin{array}{l} (1) \xrightarrow{x=0} f(0) \geq f(1) \\ (1) \xrightarrow{x=1} f(1) \geq f(0) \end{array} \right\} \Rightarrow f(1) = f(0) \quad \text{άρα όχι}$$

$$\text{ii. Έχουμε } \begin{array}{l} f(x) \geq f(1) \rightarrow f'(1) = 0 \\ f(x) \geq f(0) \rightarrow f'(0) = 0 \end{array}$$

$$f: [0, 1] \xrightarrow{\theta.Rolle} \text{ θα υπάρχει } \xi \in (0, 1): f'(\xi) = 0$$

iii. Προφανώς $f(x) \geq f(0) > 0 \Rightarrow f(x) > 0$

$$g(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \quad \begin{array}{l} g: [0, \xi] \xrightarrow{\theta.Rolle} 1 \text{ τουλάχιστον ρίζαστο } (0, \xi) \\ g: [\xi, 1] \xrightarrow{\theta.Rolle} 1 \text{ τουλάχιστον ρίζαστο } (\xi, 1) \end{array}$$