ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1°

Α. Να αποδείξετε ότι: $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

5 μονάδες

Β. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ)

i. Αν $f(x) \leq g(x), για\ x\ κοντά\ στο\ x_0,$ $με\ \lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty\ \ και\ υπάρχει\ το\ \lim_{x\to x_0} g(x),$ $τότε\ \lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$

ii. Αν το $\lim_{x\to x_0}(f(x) + g(x))$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$ τότε θα υπάρχουν και τα $\lim_{x\to x_0} f(x)$, $\lim_{x\to x_0} g(x)$

iii. Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0\ \ με\ f(x) < 0, τότε\ \lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$

iv. $|z|^2 = z^2$

v. $|z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2|$

10 μονάδες

Γ. Να δώσετε τον ορισμό της $1-1$ συνάρτησης.

5 μονάδες

ΘΕΜΑ 2°

Α. Να βρεθούν τα όρια:

i. $\lim_{x\to 4} \frac{|2x+3|-11}{x-4}$ — 3 μονάδες

ii. $\lim_{x\to 3} \frac{|1-x|-2}{x^2-9}$ — 3 μονάδες

iii. $\lim_{x\to 1} \frac{|x^5+x^3+x+2011|-2014}{x-1}$ — 4 μονάδες

Β. Έστω $z \in \mathbb{C}, z \neq -i\ \ και\ f(z) = \frac{z^3-i}{z+i}$

i. Να δείξετε ότι $f(z) = z^2 - iz - 1$ — 2 μονάδες

ii. Αν $f(z) \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι $z \in I$ ή $2Im(z) = 1$ — 4 μονάδες

iii. Να λύσετε την εξίσωση $f(z) = \frac{-z}{i}$ — 3 μονάδες

Γ. Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$ αντιστρέφεται και να βρεθεί η αντίστροφή της. — 6 μονάδες

ΘΕΜΑ 3ο

Α. Για τη συνάρτηση f ισχύει $3x - 8x^2 \le f(x) \le 3x \quad (1)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
α) Να δείξετε ότι $f(0) = 0$ **β**) να βρεθούν τα όρια.

i) $\lim_{x\to 0} f(x)$ 5 μονάδες ii) $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}$ 5 μονάδες

Β. Να βρεθούν οι παράμετροι $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ έτσι, ώστε η συνάρτηση $f(x) = (2 + 3\alpha)x + \beta + 4$ να αντιστρέφεται και να ισχύει $f^{-1} = f$.

10 μονάδες

Γ. Για τους μιγαδικούς z, w $\mu\varepsilon$ $z \neq -w$, να δειχθεί ότι $Re\left(\frac{z}{z+w}\right) + Re\left(\frac{w}{z+w}\right) = 1$

3 μονάδες

ΘΕΜΑ 4ο

Α. Για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, να βρεθεί το όριο
$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - \lambda x + 2\lambda - 2}{|x-1|}$ 5 μονάδες

Β. Αν για τις συναρτήσεις f, g ισχύει $\lim_{x\to 0} \frac{g(x)\eta\mu 2x - x^2 f(x)}{x^2} = 5$ $\kappa\alpha\iota$
$\lim_{x\to 0} \frac{g(x)\eta\mu 2x + x^2 f(x)}{x^2} = 1$, με $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) - \{0\}$ να υπολογίσετε τα όρια
$\lim_{x\to 0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{g(x)}{x}$ 10 μονάδες

Γ. Δίνονται οι μιγαδικοί z, w για τους οποίους ισχύει :
$5(7z + 1)^{13} - (3 + 4i)(z + 7)^{13} = 0$ και $w = \frac{i}{5}\left(\frac{4}{z} - z\right)$

i. Να δείξετε ότι $|z| = 1$
ii. Να δείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας του w είναι σημεία έλλειψης της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

10 μονάδες

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

ΛΥΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Θεωρία σχολικού βιβλίου

Β. i. Σ, ii. Λ, iii. Σ, iv. Λ, v. Σ

Γ. Θεωρία σχολικού βιβλίου

ΘΕΜΑ 2ο

Α. i. Το πεδίο ορισμού είναι το $A = \mathbb{R} - \{4\}$.
Για $x = 4$ μηδενίζονται και οι δύο όροι του κλάσματος (αόριστη μορφή $\frac{0}{0}$).
Για να κάνουμε παραγοντοποίηση, πρέπει να βγάλουμε το απόλυτο.
Επειδή $\lim_{x\to 4}(2x+3) = 11 > 0$ $\;είναι\; 2x+3>0\,,\; για\; x\; κοντά\; στο\; 4.$
Άρα,
$\lim_{x\to 4}\frac{|2x+3|-11}{x-4} = \lim_{x\to 4}\frac{2x+3-11}{x-4} = \lim_{x\to 4}\frac{2x-8}{x-4} = \lim_{x\to 4}\frac{2(x-4)}{x-4}\lim_{x\to 4}2 = 2$

ii. Το πεδίο ορισμού είναι $A = \mathbb{R} - \{-3, 3\}$.
Για $x = 3$ μηδενίζονται και οι δύο όροι του κλάσματος (αόριστη μορφή $\frac{0}{0}$).
Για να κάνουμε παραγοντοποίηση, πρέπει να βγάλουμε το απόλυτο.
Επειδή $\lim_{x\to 3}(1-x) = -2 < 0$ είναι $1-x<0$, για x κοντά στο 3.
Άρα $\lim_{x\to 3}\frac{|1-x|-2}{x^2-9} = \lim_{x\to 3}\frac{-(1-x)-2}{x^2-9} = \lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x\to 3}\frac{1}{x+3} = \frac{1}{6}$

iii. Το πεδίο ορισμού είναι το $A = \mathbb{R} - \{1\}$.
Για $x = 1$ μηδενίζονται και οι δύο όροι του κλάσματος (αόριστη τιμή $\frac{0}{0}$).
Για να κάνουμε παραγοντοποίηση, πρέπει να βγάλουμε το απόλυτο.
Επειδή $\lim_{x\to 1}(x^5+x^3+x+2011) = 2014 > 0$,
είναι $x^5+x^3+x+2011>0$ για x κοντά στο 1.
Άρα, $\lim_{x\to 1}\frac{|x^5+x^3+x+2011|-2014}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{x^5+x^3+x+2011-2014}{x-1} =$
$= \lim_{x\to 1}\frac{x^5+x^3+x-3}{x-1}$ (με Horner)
$= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^4+x^3+2x^2+2x+3)}{x-1} =$
$= \lim_{x\to 1}(x^4+x^3+2x^2+2x+3) = 9$

Β. i. $f(z) = \frac{z^3+i^3}{z+1} = \frac{(z+i)(z^2-iz-1)}{z+i} = z^2-iz-1$

ii. $f(z)\in\mathbb{R} \Leftrightarrow f(z) = \overline{f(z)} \Leftrightarrow z^2-iz-1 = \bar{z}^2+i\bar{z}-1 \Leftrightarrow$
$(z-\bar{z})(z+\bar{z}) - i(z+\bar{z}) = 0 \Leftrightarrow (z+\bar{z})(z-\bar{z}-i) = 0$
$2x(2yi-i) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $y = \frac{1}{2}$

iii. $f(z)=\frac{-z}{i} \Leftrightarrow z^2-iz-1=iz \Leftrightarrow z^2-2iz-1=0$

$x^2-y^2+2xyi-2i(x+yi)-1=0 \Leftrightarrow$

$x^2-y^2+2xyi-2xi+2y-1=0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x^2-y^2+2y-1=0 & (1) \\ 2xy-2x=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=0 \quad ή \quad y=1$$

για $\boxed{x=0}$ $\quad (1) \Rightarrow -y^2+2y-1=0 \Leftrightarrow y=1$

για $\boxed{y=1}$ $\quad (1) \Rightarrow x^2-1+2-1=0 \Leftrightarrow x=0$

Άρα $z=i$

Γ. Το πεδίο ορισμού είναι $A=\mathbb{R}$.
Για να αντιστρέφεται η f πρέπει και αρκεί να είναι $''1-1''$.
Για κάθε $x_1, x_2 \in A\ με\ f(x_1)=f(x_2)$ έχουμε

$$\frac{e^{x_1}}{e^{x_1}+1}=\frac{e^{x_2}}{e^{x_2}+1} \Leftrightarrow e^{x_1}e^{x_2}+e^{x_1}=e^{x_1}e^{x_2}+e^{x_2} \Leftrightarrow e^{x_1}=e^{x_2} \overset{e^{x}"1-1"}{\Longleftrightarrow} x_1=x_2$$

Άρα, η f είναι "$1-1$", οπότε αντιστρέφεται.
Θα βρούμε τον τύπο της f^{-1}.
Είναι $f(x)=y \Leftrightarrow \frac{e^x}{e^x+1}=y \Leftrightarrow e^x=ye^x+y$
$\Leftrightarrow e^x-ye^x=y \Leftrightarrow (1-y)e^x=y \Leftrightarrow e^x=\frac{y}{1-y}\ ,\ με\ y \neq 1$
και $\frac{y}{1-y}>0 \Leftrightarrow y(1-y)>0$
$\Leftrightarrow 0<y<1 \Leftrightarrow x=ln\frac{y}{1-y}\ ,\ με\ 0<y<1$

Με αλλαγή συμβολισμού θα πάρουμε $y=ln\frac{x}{1-x}\ ,\ με\ 0<x<1$.
Άρα, $f^{-1}(x)=ln\frac{x}{1-x}\ ,\ 0<x<1$.

ΘΕΜΑ 3ο

Α. i. Από τη σχέση (1), για $x=0$, θα πάρουμε $0 \leq f(0) \leq 0 \Rightarrow f(0)=0$.
Είναι $\lim_{x\to 0}(3x-8x^2)=0\ και\ \lim_{x\to 0}3x=0$,
Από το κριτήριο παρεμβολής θα πάρουμε $\lim_{x\to 0}f(x)=0$.

ii. Για να σχηματίσουμε το κλάσμα $\frac{f(x)}{x}$ διαιρούμε τη σχέση (1) με x.

- Αν $\chi>0,\ τότε\ \frac{3x-8x^2}{x} \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{3x}{x} \Leftrightarrow 3-8x \leq \frac{f(x)}{x} \leq 3$
  Είναι $\lim_{x\to 0^+}(3-8x)=3\ \ και\ \ \lim_{x\to 0^+}3=3$,
  Από το κριτήριο παρεμβολής θα πάρουμε $\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}=3$.

- Αν $x<0,\ τότε\ \frac{3x-8x^2}{x}\geq\frac{f(x)}{x}\geq\frac{3x}{x}\Leftrightarrow 3-8x\geq\frac{f(x)}{x}\geq 3$
  Είναι $\lim_{x\to 0^-}(3-8x)=3\quad και\quad \lim_{x\to 0^-}3=3$,

Από το κριτήριο παρεμβολής θα πάρουμε $\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)}{x}=3$
Επειδή $\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)}{x}=3,\ είναι\ \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=3.$

Β. Η f έχει πεδίο ορισμού το $A=\mathbb{R}$ και σύνολο τιμών $f(A)=\mathbb{R}$.
Για να αντιστρέφεται η f , πρέπει και αρκεί να είναι $''1-1''$,
δηλαδή για κάθε $x_1,\ x_2\in A$ να ισχύει η ισοδυναμία $f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow x_1=x_2$
Είναι $f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow(2+3\alpha)x_1+\beta+4=(2+3\alpha)x_2+\beta+4$
$\Leftrightarrow(2+3\alpha)x_1=(2+3\alpha)x_2$
$\Leftrightarrow(2+3\alpha)(x_1-x_2)=0\Leftrightarrow x_1=x_2,\ όταν\ 2+3\alpha\neq 0\Leftrightarrow\alpha\neq-\frac{2}{3}$
Άρα , αν $\alpha\neq-\frac{2}{3}\ \eta\ f\ είναι\ \ 1-1''$.
Για να βρούμε τον τύπο της f^{-1} έχουμε
$f(x)=y\Leftrightarrow(2+3\alpha)x+\beta+4=y$

$$\Leftrightarrow(2+3\alpha)x=y-(\beta+4)\overset{\alpha\neq-\frac{2}{3}}{\Longleftrightarrow}x=\frac{1}{2+3\alpha}y-\frac{\beta-4}{2+3\alpha}$$

Με αλλαγή συμβολισμού έχουμε $y=\frac{1}{2+3\alpha}x-\frac{\beta+4}{2+3\alpha}$
Άρα, $f^{-1}(x)=\frac{1}{2+3\alpha}x-\frac{\beta+4}{2+3\alpha},\quad x\in\mathbb{R}$.
Πρέπει $f^{-1}(x)=f(x),\ για\ κάθε\ x\in\mathbb{R}$.
$\frac{1}{2+3\alpha}x-\frac{\beta+4}{2+3\alpha}=(2+3\alpha)x+\beta+4$
$\Leftrightarrow x-(\beta+4)=(2+3\alpha)^2x+(2+3\alpha)(\beta+4)$
$\Leftrightarrow(2+3\alpha)^2x-x=-(\beta+4)-(2+3\alpha)(\beta+4)$
$\Leftrightarrow[(2+3\alpha)^2-1]x=-(\beta+4)-(2+3\alpha)(\beta+4),\ για\ κάθε\ x\in\mathbb{R}$.
Για να αληθεύει η προηγούμενη εξίσωση, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, πρέπει
$(2+3\alpha)^2-1=0$ και $-(\beta+4)-(2+3\alpha)(\beta+4)=0$ (2)
Είναι $(2+3\alpha)^2=1\Leftrightarrow 2+3\alpha=1$ ή $2+3\alpha=-1\Leftrightarrow\alpha=-\frac{1}{3}$ ή $\alpha=-1$

- Για $\alpha=-\frac{1}{3}$ από τη (2) θα πάρουμε $\beta=-4$.
- Για $\alpha=-1$ από τη (2) θα πάρουμε $0=0$, δηλαδή ισχύει για κάθε $\beta\in\mathbb{R}$.
  Άρα, αν $\alpha=-\frac{1}{3}\ και\ \beta=-4$ ή $\alpha=-1\ \ και\ \beta\in\mathbb{R}$,
  η f αντιστρέφεται και ισούται με την αντίστροφή της.

Γ. Ισχύει ο τύπος $2Re(z)=z+\bar{z}$, οπότε
$Re\left(\frac{z}{z+w}\right)+Re\left(\frac{w}{z+w}\right)=1\Leftrightarrow Re\left(\frac{z}{z+w}\right)+2Re\left(\frac{w}{z+w}\right)=2$

$$\Leftrightarrow\left[\frac{z}{z+w}+\overline{\left(\frac{z}{z+w}\right)}\right]+\left[\frac{w}{z+w}+\overline{\left(\frac{w}{z+w}\right)}\right]=2$$

$$\Leftrightarrow \frac{z}{z+w}+\frac{\bar{z}}{\bar{z}+\bar{w}}+\frac{w}{z+w}+\frac{\bar{w}}{\bar{z}+\bar{w}}=2$$

$$\Leftrightarrow \frac{z+w}{z+w}+\frac{\bar{z}+\bar{w}}{\bar{z}+\bar{w}}=2$$

$\Leftrightarrow 1+1=2,$ ισχύει

Επομένως, ισχύει και η αρχική σχέση, που είναι το ζητούμενο.

<u>ΘΕΜΑ 4ο</u>

Α. Θέτουμε $f(x)=\frac{x^2-\lambda x+2\lambda-2}{|x-1|}$, $\mu\varepsilon\ x\neq 1.$

Είναι

$\lim_{x\to 1}|x-1|=0\ \ \mu\varepsilon\ |x-1|>0,\ \gamma\iota\alpha\ x\ \kappa o\nu\tau\acute{\alpha}\ \sigma\tau o\ 1, o\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \ \lim_{x\to 1}\frac{1}{|x-1|}=+\infty$

Είναι $\lim\limits_{x\to 1}(x^2-\lambda x+2\lambda-2)=1-\lambda+2\lambda-2=\lambda-1$

- Αν $\lambda-1<0\Leftrightarrow\lambda<1,$ είναι

  $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\left[\frac{1}{|x-1|}\cdot(x^2-\lambda x+2\lambda-2\right]=$

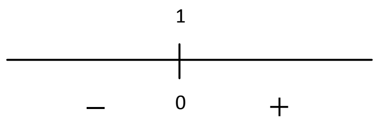
  $=\lim_{x\to 1}\frac{1}{|x-1|}\cdot\lim_{x\to 1}(x^2-\lambda x+2\lambda-2)=(+\infty)\cdot(\lambda-1)=-\infty$

- Αν $\lambda-1>0\Leftrightarrow\lambda>1,$ είναι

  $\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\left[\frac{1}{x-1}\cdot(x^2-\lambda x+2\lambda-2)\right]=$

  $$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{|x-1|}\cdot\lim_{x\to 1}(x^2-\lambda x+2\lambda-2)=(+\infty)\cdot(\lambda-1)=+\infty$$

- Αν $\lambda-1=0\ \Leftrightarrow\lambda=1,\ \ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ f(x)=\frac{x(x-1)}{|x-1|}$



  Για να βγάλουμε το απόλυτο, βρίσκουμε το πρόσημο του $x-1$

  Ο τύπος της f γράφεται $f(x)=\begin{cases}-x\ ,\ x<1\\ x\ ,\ x>1\end{cases}$

  Οπότε είναι $\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}(-x)=-1\quad \kappa\alpha\iota$

  $\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}(x)=1.$

  Τα πλευρικά όρια της f είναι διαφορετικά, επομένως, η f δεν έχει όριο στο 1.

  Άρα, είναι $\lim_{x\to 1}f(x)=\begin{cases}-\infty & \lambda<1\\ \delta\varepsilon\nu\ \upsilon\pi\acute{\alpha}\rho\chi\varepsilon\iota, & \lambda=1\\ +\infty & \lambda>1\end{cases}$

Β. Θέτουμε $\kappa(x)=\frac{g(x)\eta\mu 2x-x^2f(x)}{x^2}$, $\mu\varepsilon\ \lim_{x\to 0}\kappa(x)=5$

$\kappa(x)x^2=g(x)\eta\mu 2x-x^2f(x)$

$\Leftrightarrow\kappa(x)x^2+x^2f(x)=g(x)\eta\mu 2x$ (αφού $\eta\mu 2x\neq 0$)

$\Leftrightarrow\frac{\kappa(x)x^2+x^2f(x)}{\eta\mu 2x}=g(x)$ (1)

Θέτουμε $\lambda(x) = \frac{g(x)\eta\mu 2x + x^2 f(x)}{x^2}$, $\mu\varepsilon$ $\lim_{x\to 0}\lambda(x) = 1$

$\lambda(x)x^2 = g(x)\eta\mu 2x + x^2 f(x)$

$\Leftrightarrow$ $\lambda(x)\eta\mu 2x$ (αφού $\eta\mu 2x \neq 0$)

$\Leftrightarrow$ $\frac{\lambda(x)\cdot x^2 - x^2 f(x)}{\eta\mu 2x} = g(x)$ (2)

Από (1) και (2) έχουμε:

$\frac{x^2\kappa(x) + x^2 f(x)}{\eta\mu 2x} = \frac{x^2\lambda(x) - x^2 f(x)}{\eta\mu 2x} \Leftrightarrow$

$x^2\kappa(x) + x^2 f(x) = x^2\lambda(x) - x^2 f(x)$

$\Leftrightarrow 2x^2 f(x) = x^2\lambda(x) - x^2\kappa(x)$

$\Leftrightarrow 2f(x) = \lambda(x) - \kappa(x)$ (αφού $x \neq 0$)

Αφού $\lim_{x\to 0}\kappa(x) = 5$ και $\lim_{x\to 0}\lambda(x) = 1$ υπάρχει το $\lim_{x\to 0} f(x)$ με

$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}[\lambda(x) - \kappa(x)] =$

$= \frac{1}{2}[\lim_{x\to 0}\lambda(x) - \lim_{x\to 0}\kappa(x)] = \frac{1}{2}[1-5] = -2$

Άρα , $\lim_{x\to 0} f(x) = -2$.

ii. Από τη σχέση (2) έχουμε:

$\frac{x^2[\lambda(x) - f(x)]}{\eta\mu 2x} = g(x) \Leftrightarrow \frac{x[\lambda(x) - f(x)]}{\eta\mu 2x} = \frac{g(x)}{x}$

$\Leftrightarrow \frac{\lambda(x) - f(x)}{\frac{\eta\mu 2x}{x}} = \frac{gf(x)}{x} \Leftrightarrow \frac{\lambda(x) - f(x)}{2\frac{\eta\mu 2x}{2x}} = \frac{g(x)}{x}$

Αφού $\lim_{x\to 0}\lambda(x) = 1$ $\kappa\alpha\iota$ $\lim_{x\to 0} f(x) = -2$, υπάρχει το $\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x}$, $\mu\varepsilon$

$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{\lambda(x) - f(x)}{2\frac{\eta\mu x 2x}{2x}}\right]$

$\Leftrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x} = \frac{\lim_{x\to 0}\lambda(x) - \lim_{x\to 0} f(x)}{2\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu 2x}{2x}} = \frac{1+2}{2\cdot 1} = \frac{3}{2}$

Γ i. $5\cdot(7z+1)^{13} = (3+4i)(z+7)^{13} \Rightarrow$

$5|7z+1|^{13} = \sqrt{9+16}\cdot z + 7^{13} \Rightarrow$

$|7z+1| = |z+7| \Leftrightarrow |7x+7yi+1| = |x+yi+7| \Leftrightarrow$

$\sqrt{(7x+1)^2 + (7y)^2} = \sqrt{(x+7)^2 + y^2} \Leftrightarrow 49x^2 + 14x + 1 + 49y^2 =$

$= x^2 + 14x + 49 + y^2 \Leftrightarrow 48x^2 + 48y^2 = 48 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$

$\Leftrightarrow |z| = 1$

ii. $w = \frac{i}{5}\left(\frac{4}{\alpha+\beta i} - (\alpha+\beta i)\right) \Leftrightarrow w = \frac{i}{5}\left[\frac{4(\alpha-\beta i)}{\alpha^2+\beta^2} - \alpha - \beta i\right]$

αφού $\alpha^2 + \beta^2 = 1$

$w = \frac{i}{5}(4\alpha - 4\beta i - \alpha - \beta i) \Leftrightarrow w = \frac{i}{5}(3\alpha - 5\beta i)$

$\Leftrightarrow w = \frac{3}{5}\alpha i + \beta \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{5}\alpha \\ x = \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{5y}{3} \\ \beta = x \end{cases}$

Η σχέση $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ γίνεται:

$$\frac{5^2y^2}{3^2}+x^2=1 \iff \frac{y^2}{\left(\frac{3}{5}\right)^2}+x^2=1$$