

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Έστω f μια συνάρτηση, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ . Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ .

B. Να δοθεί ο ορισμός της (πλάγιας) ασύμπτωτης της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο $-\infty$.

Γ. Να χαρακτηρίσετε ως σωστές (Σ) ή λάθος (Λ) τις παρακάτω προτάσεις.

1. $Re(z_1 \cdot z_2) = Re(z_1) \cdot Re(z_2)$.
2. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ και είναι παραγωγίσιμη στο Δ τότε $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$.
3. Το πεδίο ορισμού του αθροίσματος 2 συναρτήσεων είναι η ένωση των πεδίων ορισμού των 2 συναρτήσεων.
4. Αν η f είναι συνεχής στο x_0 τότε είναι και παραγωγίσιμη στο x_0 .
5. Αν η f είναι κυρτή σ' ένα διάστημα Δ τότε η εφαπτομένη της γραφικής της παράστασης, σε κάθε σημείο του Δ , βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3$

A. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατά της.

B. Να υπολογίσετε το σύνολο τιμών της.

Γ. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητά της και να βρείτε το σημείο καμπής της.

Δ. Να βρείτε την εφαπτομένη της f στο σημείο καμπής της.

E. Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f και της εφαπτομένης του (Δ) ερωτήματος και να βρείτε το διάστημα που η γραφική παράσταση της f , είναι πάνω από την εφαπτομένη.

ΘΕΜΑ 3^ο

A. Έστω $z, \omega \in \mathbb{C}$ με $z = (3 + 2\alpha) + (4\alpha + 3)i$, $\alpha \in \mathbb{R}$ και $|\omega - 4 - 3i| = 2$

- I. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο της εικόνας M του Z.
- II. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του $|z - 3 + 4i|$.
- III. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο της εικόνας N του ω .
- IV. Να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή του $|\omega + 1 + 2i|$.

B. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 2 φορές παραγωγίσιμη.

Αν $\alpha < \beta$ να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε να ισχύει η σχέση

$$f'(\xi) = \frac{\alpha + \beta - 2\xi}{(\alpha - \xi)(\xi - \beta)}$$

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνεται $f(x) = x \cdot \ln(x + 1) - (x + 1) \cdot \ln x$, $x > 0$

- i. Να δείξετε ότι $\ln(x + 1) - \ln x < \frac{1}{x}$
- ii. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.
- iii. Να υπολογίσετε το
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right]$$
- iv. Να υπολογίσετε το
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$
- v. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός $\alpha \in (0, +\infty)$ τέτοιος ώστε $(\alpha + 1)^\alpha = \alpha^{\alpha+1}$.

ΟΛΑ ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΙΝΑΙ ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

Α., Β. Οι απαντήσεις βρίσκονται στο σχολικό βιβλίο.

Γ. 1.Λ, 2.Λ, 3.Λ, 4.Λ, 5.Σ

ΘΕΜΑ 2^ο

A. $f'(x) = 3x^2 - 4x$

x	$-\infty$	0	$\frac{4}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	-	+	
$f(x)$				

T.max $f(0) = 3$, T.min $f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{49}{27}$

B.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ άρα $\Sigma.T. = R$

Γ. $f''(x) = 6x - 4$

x	$-\infty$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	+	
$f(x)$	κάτω	πάνω	

Σημείο καμπής : $f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{27} - 2\frac{4}{9} + 3 = \frac{8-24+81}{27} = \frac{65}{27}$ άρα $\left(\frac{2}{3}, \frac{65}{27}\right)$

Δ. $y - f\left(\frac{2}{3}\right) = f'\left(\frac{2}{3}\right)\left(x - \frac{2}{3}\right)$, $f'\left(\frac{2}{3}\right) = 3\frac{4}{9} - 4\frac{2}{3} = -\frac{4}{3}$

$$y - \frac{65}{27} = -\frac{4}{3}\left(x - \frac{2}{3}\right)$$

$$y = -\frac{4}{3}x + \frac{8}{9} + \frac{65}{27} \Leftrightarrow y = -\frac{4}{3}x + \frac{89}{27}$$

Ε. Σημείο τομής το $\left(\frac{2}{3}, \frac{65}{27}\right)$ και λόγω κυρτότητας

$f(x) > \varepsilon$ φαπτομένης για κάθε $x \in \left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$

ΘΕΜΑ 3^ο

A.

- I. $\begin{cases} 3 + 2\alpha = \chi \\ 4\alpha = 3 = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha = x - 3 \\ 2x - 6 + 3 = y \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{2x - y - 3 = 0} \quad (\varepsilon)$
- II. $|Z - 3 + 4i| \min = d((3,4), \varepsilon) = \frac{|2 \cdot 3 - 4 - 3|}{\sqrt{4+1}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$
- III. $(\chi - 4)^2 + (y - 3)^2 = 2^2 \quad \kappa(4,3), R = 2$
- IV. $|\omega + 1 + 2i| = |v - (-1 - 2i)| \quad A(-1, -2)$
 $(KA) = \sqrt{5^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}$
 $|\omega + 1 + 2i| \max = 5\sqrt{2} + 2$
 $|\omega + 1 + 2i| \min = 5\sqrt{2} - 2$

B. $g(x) = (a - x)(x - \beta)f'(x) + 2x - \alpha - \beta$

και εφαρμόζουμε θεώρημα Bolzano.

ΘΕΜΑ 4^ο

- i. Από ΘΜΤ $\frac{\ln(x+1) - \ln x}{x+1-x} = \frac{1}{\xi} < \frac{1}{\chi}$ αφού $\chi < \xi$
- ii. $f'(x) = \ln(x+1) + \frac{x}{x+1} - \frac{x+1}{x} - \ln x < \frac{x}{x+1} - \frac{x+1}{x} + \frac{1}{x} = \frac{x^2 - (x+1)^2 + x + 1}{x(x+1)} = \frac{x^2 - x^2 - 2x - 1 + x + 1}{x(x+1)} = \frac{-x}{x(x+1)} = -\frac{1}{x+1} < 0$
- iii.
- $$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + \frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = 1.$$
- iv. Λόγω (iii)
- $$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x \ln(x+1) - x \ln x) = 1$$
- $$f(x) = (x \ln(x+1) - x \ln x) - \ln x$$
- $$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 - (+\infty) = -\infty$$
- v. $(x+1)^x = x^{x+1} \Leftrightarrow x \ln(x+1) = (x+1) \ln x \Leftrightarrow f(x) = 0$
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ άρα $\Sigma T = R$ άρα θα υπάρχει $\alpha: f(\alpha) = 0$ και το α : μοναδικό λόγω μονοτονίας.