

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1^ο

A. i) Να αποδείξετε ότι $(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$

(7 μονάδες)

ii) Να διατυπώσετε και να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος μέσης τιμής διαφορικού λογισμού

(5 μονάδες)

iii) Να γράψετε τον ορισμό της 1 -1 συνάρτησης

(3 μονάδες)

B. Να χαρακτηρίσετε ως σωστές (Σ) ή λάθος (Λ) τις παρακάτω προτάσεις

1) Αν ισχύει $f(x) < g(x)$ κοντά στο x_0 και υπάρχουν τα $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ τότε ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

2) $|z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2|$ για κάθε $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

3) Αν η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και υπάρχει $x_0 \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$ τότε θα ισχύει $f(a) \cdot f(b) < 0$

4) Κάθε συνάρτηση που δεν είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της δεν είναι και συνεχής στο x_0

5) Αν f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και είναι γνησίως αύξουσα σ' αυτό τότε ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$

6) Ο μιγαδικός $(3 + 2i)^{20} - (3 - 2i)^{20}$ είναι φανταστικός

7) Αν $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και είναι γνησίως φθίνουσες τότε η $g \circ f$ ορίζεται στο $\mathbb{R}$ και είναι γνησίως φθίνουσα

8) Κάθε συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ που δεν είναι 1-1 δεν είναι και γνησίως μονότονη στο Δ .

(10 μονάδες)

ΘΕΜΑ 2^ο

Έστω οι μιγαδικοί $z = \frac{2\lambda + 4i}{2 + \lambda i}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να δείξετε ότι $|z| = 2$

(5 μονάδες)

β) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z

(4 μονάδες)

γ) Να δείξετε ότι οι μιγαδικοί $\omega = z + \frac{4}{z}$ είναι πραγματικοί

(6 μονάδες)

δ) Να βρείτε το λ ώστε ο ω να μεγιστοποιείται και να ελαχιστοποιείται τοπικά

(10 μονάδες)

ΘΕΜΑ 3^ο

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) = 0, f'(1) = 1$ ώστε να ισχύει η σχέση $f(xy) \leq xf(y) + yf(x)$ για κάθε $x, y > 0$. Να δειχθεί ότι:

α) $f(x) = x \ln x, x > 0$

(8 μονάδες)

β) Να μελετήσετε την f ως προς μονοτονία και ακρότατα και να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $(1,0)$

(4 μονάδες)

γ) Η f είναι κυρτή

(2 μονάδες)

δ) $x \ln x > x - 1$ για κάθε $x > 1$

(3 μονάδες)

ε) Αν $x_2 > x_1 > 0$ τότε $x_1^{x_1} \cdot x_2^{x_2} > \left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^{x_1+x_2}$

(8 μονάδες)

ΘΕΜΑ 4^ο

A.α) Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $f(x) = c \cdot e^x, c \in \mathbb{R}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

(3 μονάδες)

β) Αν g : ορισμένη στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ για την οποία ισχύει $g'(x) \sin x + g(x) \eta \mu x = g(x) \sin x$ για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ και $g(0) = 2010$ να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης g .

(7 μονάδες)

B. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2 \ln x - x^2 + 1 \quad x > 0$

α) Να βρείτε τα $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(4 μονάδες)

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) \leq 0$ για κάθε $x > 0$

(4 μονάδες)

γ) Να βρείτε τους θετικούς α, β που ικανοποιούν την σχέση $4\alpha^2 - 4\alpha\beta + 2\beta^2 - 2\ln\beta - 1 = 0$

(7 μονάδες)

Καλή Επιτυχία.

ΟΙ ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ ΚΑΘΩΣ ΚΑΙ ΟΙ ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ ΘΑ ΒΡΙΣΚΟΝΤΑΙ ΣΤΗΝ

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΤΟΥ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟΥ ΜΑΣ

www.apolito.gr

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

B.1) Λ

2) Σ

3) Λ

4) Λ

5) Λ

6) Σ

7) Λ

8) Σ

ΘΕΜΑ 2^ο

α) $|z| = \frac{\sqrt{4\lambda^2+16}}{\sqrt{4+\lambda^2}} = 2$

β) $|z| = 2 \rightarrow$ κύκλος με κέντρο το $O(0,0)$ και $R = 2$

γ) $\bar{\omega} = \frac{4}{z} + \frac{4}{\frac{4}{z}} = \frac{4}{z} + z = \omega, \bar{z} = \frac{4}{z}$

δ) $\omega = z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z)$

$$z = \frac{2\lambda+4i}{2+\lambda i} = \frac{(2\lambda+4i)(2-\lambda i)}{4+\lambda^2} = \frac{4\lambda-2\lambda^2 i+8i+4\lambda}{\lambda^2+4}$$

Άρα $\omega = 2 \cdot \frac{8\lambda}{\lambda^2+4} = f(\lambda)$

$$f'(\lambda) = 2 \cdot \frac{8(\lambda^2+4)-8\lambda \cdot 2\lambda}{(\lambda^2+4)^2} = 2 \cdot \frac{-8\lambda^2+32}{(\lambda^2+4)^2} = 2 \cdot \frac{-8(\lambda^2-4)}{(\lambda^2+4)^2}$$

λ		-2		2		
$f'(\lambda)$		-	○	+	○	-
$f(\lambda)$		↘		↗		↘

Άρα για $\lambda = 2$ έχουμε τοπικό μέγιστο και για $\lambda = -2$ έχουμε τοπικό ελάχιστο.

ΘΕΜΑ 3^ο

α) $g(x) = f(xy) - xf(y) - yf(x)$

$$g(x) \leq 0 \Leftrightarrow g(x) \leq g(1)$$

Άρα λόγω θεωρήματος Fermat

$$g'(1) = 0 \quad g'(x) = f'(xy) \cdot y - f(y) - yf'(x)$$

$$g'(1) = 0 \Leftrightarrow f'(y)y - f(y) - y = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{f'(y)y - f(y)}{y^2} = \frac{1}{y}$$

$$\frac{f(x)}{x} = \ln x + C$$

για $x = 1$ έχουμε $c = 0$ άρα $f(x) = x \ln x$ για κάθε $x > 0$

β) $f'(x) = \ln x + 1, f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$

x	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$		$\searrow$	$\nearrow$

$-\frac{1}{e}$
min

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1)$$

$$y - 0 = 1(x - 1)$$

$$y = x - 1$$

$$\gamma) f'(x) = \ln x + 1, f''(x) = \frac{1}{x} > 0 \text{ άρα } f \text{ κυρτή}$$

δ) Αφού f κυρτή

$$f(x) \geq y_{\varepsilon\varphi}$$

$$f(x) \geq x - 1 \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty)$$

$$\text{άρα στο } (1, +\infty) \quad x \ln x > x - 1$$

$$\varepsilon) f: \left[x_1, \frac{x_1+x_2}{2} \right] \xrightarrow{\Theta MT} f'(\xi_1) = \frac{f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) - f(x_1)}{\frac{x_1+x_2}{2} - x_1}$$

$$f: \left[\frac{x_1+x_2}{2}, x_2 \right] \xrightarrow{\Theta MT} f'(\xi_2) = \frac{f(x_2) - f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)}{x_2 - \frac{x_1+x_2}{2}}$$

$$\xi_1 < \xi_2 \stackrel{f' \uparrow}{\Leftrightarrow} f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \Leftrightarrow 2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < f(x_1) + f(x_2)$$

$$2 \frac{x_1+x_2}{2} \ln\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < x_1 \ln x_1 + x_2 \ln x_2$$

$$\ln\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^{x_1+x_2} < \ln(x_1^{x_1} \cdot x_2^{x_2})$$

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^{x_1+x_2} < (x_1^{x_1} \cdot x_2^{x_2})$$

ΘΕΜΑ 4⁰

$$A. \alpha) f'(x) = f(x) \Leftrightarrow f'(x) \cdot e^{-x} - f(x) \cdot e^{-x} = 0 \Leftrightarrow (f(x)e^{-x})' = 0$$

$$\Leftrightarrow f(x)e^{-x} = c \Leftrightarrow f(x) = c \cdot e^x$$

$$\beta) \frac{g'(x)\sigma\upsilon\nu x - g(x)(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{g(x)}{\sigma\upsilon\nu x}$$

$$\frac{g(x)}{\sigma\upsilon\nu(x)} = c \cdot e^x \Leftrightarrow g(x) = e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x \cdot 2010$$

$$B. \alpha) \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\frac{2 \ln x}{x^2} - 1 + \frac{1}{x^2} \right) = -\infty$$

$$* \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{2x^2} = 0$$

$$\beta) f'(x) = \frac{2}{x} - 2x = \frac{2-2x^2}{x}$$

x	0		1	
$f'(x)$		+		-
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$

max

$$f(1) = 0$$

άρα λόγω $\max f(x) \leq f(1) \Leftrightarrow f(x) \leq 0$

$$\gamma) 4\alpha^2 - 4\alpha\beta + \beta^2 + \beta^2 - 2\ln\beta - 1 = 0$$

$$(2\alpha - \beta)^2 - f(\beta) = 0 \Leftrightarrow (2\alpha - \beta)^2 = f(\beta) \leq 0. \text{ Άρα } \begin{cases} f(\beta) = 0 \\ \text{και} \\ 2\alpha - \beta = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 1(\text{απο } (\beta)) \\ \alpha = \frac{1}{2} \end{cases}$$