ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1^{O}

Α. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και $f(\alpha)\neq f(\beta)$ τότε για κάθε αριθμό n μεταξύ των $f(\alpha)$ $και$ $f(\beta)$, θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=n$

12μονάδες

Β. Να δώσετε τον ορισμό της $1-1$ συνάρτησης.

3μονάδες

Γ. Να χαρακτηρίσετε ως σωστές (Σ) ή λάθος (Λ) τις παρακάτω προτάσεις.

i)Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης είναι διάστημα.

ii)$|z|^2=z\cdot\bar{z}$

iii)Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ τότε η f θα είναι συνεχής στο (α,β)

iv)Κάθε γνησίως μονότονη συνάρτηση είναι $1-1$

v)Αν η f συνεχής στο x_0 , g συνεχής στο x_0 τότε $f\text{o}g$ συνεχής στο x_0

10μονάδες

ΘΕΜΑ 2^{O}

(Α) Δίνονται οι μιγαδικοί z , ω για τους οποίους ισχύουν αντίστοιχα οι σχέσεις $|z-1|=|z+i|$ και

$|\omega-1-i|=\frac{1}{2}$

i)Να δείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας του z είναι μια ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

6μονάδες

ii)Να δείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας του ω είναι ένας κύκλος

6μονάδες

iii)Να δείξετε ότι $|z-\omega|\geq\sqrt{2}-\frac{1}{2}$

3μονάδες

(Β)Να δείξετε ότι η εξίσωση $-x^3-5lnx=0$ έχει μια τουλάχιστον ριζά στο $\left(\frac{1}{e},1\right)$

10μονάδες

ΘΕΜΑ 3^{O}

Α. Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που είναι συνεχείς και ισχύουν:
$f^2(x)-g^2(x)+5x=0$ (1) και $f(x)>g(x)$ (2) για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)+g(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα σε οποιοδήποτε διάστημα (α,β) με $\alpha\cdot\beta<0$

9μονάδες

Β. Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = e^x + lnx + x - 1$.

α)Να βρείτε το σύνολο τιμών της

4μονάδες

β)Να δείξετε ότι η εξίσωση $g(x) = \alpha$ έχει μοναδική ρίζα για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$

4μονάδες

γ)Να λυθεί η εξίσωση $g(x) = e$

4μονάδες

δ)Να βρεθεί το κ , για το οποίο ισχύει: $e^{\kappa^2+4} - e^{4\kappa} = ln(4\kappa) - ln(\kappa^2+4) + 4\kappa - \kappa^2 - 4$

4μονάδες

ΘΕΜΑ 4^{O}

Θεωρούμε : 1)Την συνεχή συνάρτηση f $\mu\varepsilon$ $f: [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{R}$

2)Τους μιγαδικούς $z_1 = f(\alpha) + \beta i$, $z_2 = f(\beta) + \alpha i$ για τους οποίους ισχύει $|z_1 - z_2| = |z_1 + z_2|$

3)Τον μιγαδικό ω για τον οποίο ισχύει $\omega + \frac{1}{\omega} = -1$

Αν $\alpha = \omega^{2004} + \omega^{2010} + \left(\frac{1}{\omega}\right)^{2007}$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+4} + (\beta-3)x + \beta\right) = \alpha$ τοτε:

(Α) Να δείξετε ότι $\alpha = 3$ και $\beta = 4$

10μονάδες

(Β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (α, β)

8μονάδες

(Γ) Αν επιπλέον η f είναι γνησίως μονότονη και ισχύει $f^2(3) + f^2(4) + 25 = 8f(3) + 6f(4)$

α)να βρείτε το σύνολο τιμών της

4μονάδες

β)να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2f(x) - 7 = 0$ έχει ακριβώς μια λύση στο (α, β)

3μονάδες

Καλή επιτυχία

<u>ΟΙ ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ ΚΑΘΩΣ ΚΑΙ ΟΙ ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ ΘΑ ΒΡΙΣΚΟΝΤΑΙ ΣΤΗΝ ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΤΟΥ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟΥ ΜΑΣ</u>

www.apolito.gr

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^{Ο}

Α)Θεωρία σχολικού

Β)Θεωρία σχολικού

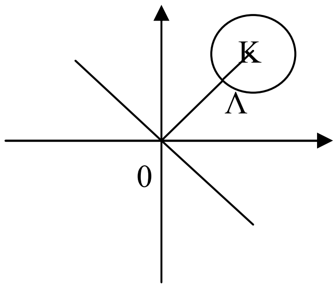
Γ)(i)Λάθος
(ii) Σωστό
(iii)Σωστό
(iv)Σωστό
(v)Λάθος

ΘΕΜΑ 2^{Ο}

(Α)(i) $|x+yi-1| = |x+yi+i| \Leftrightarrow x^2+y^2-2x+1 = x^2+y^2+2y+1 \Leftrightarrow y=-x$

(ii)$(x-1)^2+(y-1)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$ κύκλος με κέντρο $\kappa(1,1)$ και $\rho = \frac{1}{2}$

(iii)



$|z-\omega|min = O\Lambda = OK - K\Lambda = \sqrt{2} - \frac{1}{2}$

(Β)Θεώρημα Bolzano για την $f(x) = -x^3 - 5lnx$ $\sigma\tau o$ $\left[\frac{1}{e},1\right]$

ΘΕΜΑ 3^{Ο}

Α) $h(x) = f(x) + g(x) = \frac{-5x}{f(x)-g(x)}$

Θεώρημα Bolzano για την h στο $[\alpha,\beta]$

Β)α)Η g είναι γνησίως αύξουσα άρα $\Sigma.T. = \left(\lim_{x\to+0^+} f(x), \lim_{x\to+\infty} g(x)\right) = (-\infty,+\infty) = \mathbb{R}$

β)Λόγω συνόλου τιμών και χρησιμοποιώντας το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών

γ)$g(x) = g(1) \Leftrightarrow x = 1$

δ)$g(\kappa^2+4) = g(4\kappa) \Leftrightarrow \kappa^2+4 = 4\kappa \Leftrightarrow \kappa = 2$

<u>ΘΕΜΑ 4^{O}</u>

(A) $\omega^2 + \omega + 1 = 0 \Leftrightarrow \omega^3 = 1$

(B)Λόγω της σχέσης (2) $f(\alpha)f(\beta) = -\alpha\beta$ άρα χρήση θεωρήματος Bolzano στο $[\alpha, \beta]$

(Γ) $f(3) = 4\ \kappa\alpha\iota\ f(4) = 3\ ά\rho\alpha\ \Sigma T = [3,4]$

(Δ) $f(x) = \frac{7}{2}$ και λόγω θεωρήματος ενδιαμέσων τιμών ισχύει.