ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σ' όλο το Δ.

10 μονάδες

Β. Να χαρακτηρίσετε ως Σ (σωστές) ή Λ (λάθος) τις παρακάτω προτάσεις:

1. Αν $f'(x) = (x-1)^2(x-2)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε το $f(1)$ είναι τοπικό ακρότατο της f.
2. Η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ με $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ και $\alpha \neq 0$ έχει πάντα ένα σημείο καμπής.
3. Αν οι συναρτήσεις f,g έχουν στο x_0 σημείο καμπής τότε η h=f·g έχει στο x_0 σημείο καμπής.
4. Αν η f είναι συνεχής στο x_0 τότε θα είναι και παραγωγίσιμη στο x_0.
5. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $f'(x_0) = 0$ τότε η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 .

10 μονάδες

Γ. Να δώσετε τον ορισμό της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A\left(x_0, f(x_0)\right)$.

5 μονάδες

ΘΕΜΑ 2ο

Α. Να βρείτε τα α, β αν γνωρίζετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} e^{2x} + \alpha x\,, x \leq 0 \\ \ln(x+1) + \beta - 3\,,\ x > 0 \end{cases}$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

10 μονάδες

Β.

i. Να αποδείξετε ότι $e^x - x \geq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. 5 μονάδες

ii. Αν $f'(x\ \ ) > 0$ *για κάθε* $x \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι η $h(x) = 2e^{f(x)} - f^2(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

10 μονάδες

ΘΕΜΑ 3ο

Α. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $6x^2 + 2 = x^3 + 9x$.

10 μονάδες

Β. Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης :
$3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 24x - \alpha = 0$ για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$.

15 μονάδες

ΘΕΜΑ 4ο

Α. Δίνεται η 2 φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f''(x) > f'(x)$ για κάθε $x \geq 0$ και $f(0) = f'(0) = 0$. Να αποδείξετε ότι :

i. $f'(x) > f(x)$ για κάθε $x > 0$ 5 μονάδες

ii. $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$ 3 μονάδες

iii. Η γραφική παράσταση της $f^2(x)$ βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της. 2 μονάδες

Β. Δίνεται η συνάρτηση f που είναι 2φορές παραγωγίσιμη στο $[1, 4]$ για την οποία ισχύει :

$f(x) \geq \frac{3f(1)+f(3)}{4}$ (1) και $|f''(x)| \leq 2$ (2) για κάθε $x \in [1, 4]$.

Να αποδείξετε ότι :

i. f(1)=f(3) 2 μονάδες

i. $f'(3)=0$ 4 μονάδες

ii. η f έχει στο $(1, 4)$ τουλάχιστον 2 κρίσιμα σημεία και τουλάχιστον μια πιθανή θέση σημείου καμπής. 4 μονάδες

iii. $|f'(4)| \leq 2$ 5 μονάδες

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΘΕΜΑΤΩΝ
ΜΠΑΤΖΑΚΑΣ ΜΙΧΑΛΗΣ
ΠΕΤΡΟΠΟΥΛΟΣ ΙΩΑΝΝΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ 1^{Ο}
Β.
1.Λ
2. Σ
3. Λ
4. Λ
5. Λ

ΘΕΜΑ 2^{Ο}
Α. Με χρήση κανόνα Del'Hospital $\alpha = -1$, $\beta = 4$
Β.
i. Θεωρώ $g(x) = e^x - x - 1$ και χρησιμοποιώ μονοτονία και ακρότατα οπότε $g(x) \geq g(0)$.
ii. $h'(x) = 2f'(x)e^{f(x)} - 2f(x)f'(x) = 2f'(x)(e^{f(x)} - f(x))$ και χρησιμοποιώ το i.

ΘΕΜΑ 3^{Ο}
Α. Θέτω $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$ και με τη βοήθεια μονοτονίας και συνόλου τιμών η f έχει 3 ρίζες στο $\mathbb{R}$

Β. $f(x) = 3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 24x$ Αρκεί οπότε να λύσω την εξίσωση f(x)=α

$$f'(x) = 12x^3 - 24x^2 - 12x + 24 = 12(x^3 - 2x^2 - x + 2) = 12(x-1)(x+1)(x-2)$$

x	$-\infty$ -1	1	2	$+\infty$
f′(x)	-	+	-	+
f(x)	↘	↗	↘	↗

f (-1) = -19, f(1)=13, f(2)=8,

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις

$\alpha < -19$	τότε δεν έχουμε ρίζα
$\alpha = -19$	τότε έχουμε 1 ρίζα
$\alpha \in (-19, 8)$	τότε έχουμε 2 ρίζες
α=8	τότε έχουμε 3 ρίζες
$\alpha \in (8,13)$	τότε έχουμε 4 ρίζες
α=13	τότε έχουμε 3 ρίζες
$\alpha > 13$	τότε έχουμε 2 ρίζες

Τηλ./Fax: 210.62.19.712, Τηλ: 210.6218.894 www.apolito.gr – e-mail:info@apolito.gr
Λεωφόρος Μαραθώνος &Χρυσοστόμου Σμύρνης 3, **14565 ΑΓΙΟΣ ΣΤΕΦΑΝΟΣ**

ΘΕΜΑ 4^Ο^

Α.

i. i Θεωρώ $g(x) = f'(x) - f(x)$ και χρησιμοποιώ την μονοτονία της

ii. Θεωρώ $h(x) = e^{-x}f(x)$ και χρησιμοποιώ την μονοτονία της

iii. Θεωρώ $κ(x) = f^2(x)$ και δείχνω ότι η κ είναι κυρτή στο $[0, +\infty)$

Β.

i. Χρησιμοποιώ την (1) για x=1 και x=3

ii. Βάζω στην (1) όπου f(1) to f(3) και χρησιμοποιώ θεώρημα Fermat.

iii. Χρησιμοποιώ θεώρημα Rolle για την f στο $[1,3]$ άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1,3)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0$. Χρησιμοποιώ θεώρημα Rolle για την f' στο $[\xi, 3]$ άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi' \in (\xi, 3)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi')=0$

iv. Χρησιμοποιώ Θ.Μ.Τ. για την f' στο $[3,4]$ άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\kappa \in (3,4)$ τέτοιο ώστε $f''(\kappa) = \frac{f'(4)-f'(3)}{4-3} = f'(4)$

Βάζω στη (2) $x \to \kappa$: $|f''(\kappa)| \leq 2 \Leftrightarrow |f'(4)| \leq 2$

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ
ΜΠΑΤΖΑΚΑΣ ΜΙΧΑΛΗΣ
ΠΕΤΡΟΠΟΥΛΟΣ ΙΩΑΝΝΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ