



ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΘΕΤΙΚΗΣ -ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ'ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και $f(\alpha) \neq f(\beta)$ να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος ώστε $f(x_0) = \eta$.

10 μονάδες

B. Να χαρακτηρίσετε ως σωστές (Σ) ή λάθος (Λ) τις παρακάτω προτάσεις :

i) Αν η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της συνεχούς f στο $[\alpha, \beta]$ συμπίπτουν τότε η f είναι σταθερή στο $[\alpha, \beta]$.

ii) Η εικόνα ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης f είναι διάστημα.

iii) $|z|^2 = z^2$

iv) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = 0$

v) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$

10 μονάδες

Γ. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = ax + 1$ $g(x) = 3x - 1$. Να βρεθεί ο a ($a \in \mathbb{R}$) έτσι ώστε $\text{fog} = \text{gof}$.

5 μονάδες

ΘΕΜΑ 2^ο

A. Έστω

$$\alpha = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2 + 1} - x + 4}{x + 2} \quad \text{και} \quad \beta = \lim_{x \rightarrow 4} f(x)$$

$$\text{Όταν } \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} \leq f(x) \leq \frac{4-x}{x^2-12x+32} \text{ για κάθε } x \in (3, 4) \cup (4, 5)$$

Να αποδείξετε ότι $\alpha = -1$ και $\beta = \frac{1}{4}$

8 μονάδες

B. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $\kappa(x) = x^3 - 5x - 2$ έχει 1 τουλάχιστον ρίζα στο (α, β)

7 μονάδες

Γ. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του μιγαδικού z όταν $|z - \alpha + \beta i| = \frac{1}{10}$ καθώς και το μικρότερο και μεγαλύτερο $|z|$.

10 μονάδες

ΘΕΜΑ 3^ο

A. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο $\Delta = [0, 5]$ και γνησίως μονότονη στα διαστήματα $[0, 2]$, $[2, 4]$, $[4, 5]$. Αν $f(0) = 1$, $f(2) = -2$, $f(4) = 3$ και $f(5) = -4$ να βρεθούν:

- 1) Η μονοτονία της f .
- 2) Το σύνολο τιμών της f .
- 3) Το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο διάστημα Δ .

10 μονάδες

Β. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: [1,4] \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι γνησίως αύξουσα και ισχύει η σχέση $f^2(1) + f^2(4) = 2f(4) - 6f(1) - 10$. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f .

8 μονάδες

Γ. Ναδειχθεί ότι η εξίσωση $x^5 - 24x + 3 = 0$ έχει τουλάχιστον δύο ρίζες στο διάστημα $(0,3)$

7 μονάδες

ΘΕΜΑ 4^ο

Α. Δίνεται αντιστρέψιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$f(f(x)) = x^2 - 6x + 12, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να αποδειχθεί ότι $f(3) + f(4) = 7$.

5 μονάδες

Β. Αν για τις συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύουν :

$$\lim_{x \rightarrow 2} [2f(x) - xg(x)] = -4 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 2} [(x-1)f(x) + 4g(x)] = 23$$

να βρείτε, αν υπάρχουν, τα όρια

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \quad \text{και}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$$

8 μονάδες

Γ. Έστω οι συναρτήσεις $f, g: [a, \beta] \rightarrow [\alpha, \beta]$ συνεχείς, με $f(a) = a$ και $g(\beta) = \beta$.

Να αποδειχθεί ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in [a, \beta]$ ώστε

$$\mu f(x_0) + \nu g(x_0) = (\mu + \nu)x_0, \text{ όπου } \mu, \nu \in \mathbb{R} \text{ και είναι ομόσημοι.}$$

12 μονάδες

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΘΕΜΑΤΩΝ
ΠΕΤΡΟΠΟΥΛΟΣ ΙΩΑΝΝΗΣ
ΜΠΑΤΖΑΚΑΣ ΜΙΧΑΗΛ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

Β.

- i. Σ
- ii. Λ
- iii. Λ
- iv. Λ
- v. Σ

Γ.

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) &\Leftrightarrow f(g(x)) = g(f(x)) \Leftrightarrow f(3x - 1) = g(ax + 1) \Leftrightarrow a(3x - 1) + 1 = \\ 3(ax + 1) - 1 &\Leftrightarrow 3ax - a + 1 = 3ax + 2 \Leftrightarrow a = -1 \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 2^ο

Α.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^2 + 1} - x + 4}{x + 2} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} \right)} - x + 4}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|x| \sqrt[3]{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}} - x + 4}{x + 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \sqrt[3]{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}} - x + 4}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \left(\sqrt[3]{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}} - 1 + \frac{4}{x} \right)}{x \left(1 + \frac{2}{x} \right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}} - 1 + \frac{4}{x}}{1 + \frac{2}{x}} = \frac{-1}{1} = -1 \end{aligned}$$

Είναι

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{\sqrt{x} + 2} = \frac{1}{4}$$

Και

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{4 - x}{x^2 - 12x + 32} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-(x - 4)}{(x - 4)(x - 8)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-1}{x - 8} = \frac{1}{4}$$

Οπότε από το κριτήριο παρεμβολής $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \frac{1}{4}$

Β.

$$\kappa(-1) = -1 + 5 - 2 = 2 > 0$$

$$\kappa\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{64} - \frac{5}{4} - 2 = \frac{1 - 80 - 128}{64} = \frac{-207}{64} < 0$$

Άρα λόγω Θεωρήματος Bolzano θα υπάρχει 1 τουλάχιστον ρίζα στο $\left(-1, \frac{1}{4}\right)$

Γ.

$$\left|z + 1 + \frac{1}{4}i\right| = \frac{1}{10} \Leftrightarrow \left|z - \left(-1 - \frac{1}{4}i\right)\right| = \frac{1}{10} \text{ άρα κύκλος με κέντρο } K\left(-1, -\frac{1}{4}\right) \text{ και } \rho = \frac{1}{10}$$

$$|z|_{\min} = (OK) - \rho = \frac{\sqrt{17}}{4} - \frac{1}{10} = \frac{5\sqrt{17} - 2}{20}$$

$$|z|_{\max} = (OK) + \rho = \frac{\sqrt{17}}{4} + \frac{1}{10} = \frac{5\sqrt{17} + 2}{20}$$

$$(OK) = \sqrt{1 + \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{17}}{4}$$

ΘΕΜΑ 3^ο

A.

1.

Έχουμε $1 > -2 \Leftrightarrow f(0) > f(2)$ και επειδή $0 < 2$, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, 2]$.

Επίσης $-2 < 3 \Leftrightarrow f(2) < f(4)$ και επειδή $2 < 4$, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[2, 4]$.

Επίσης $3 > -4 \Leftrightarrow f(4) > f(5)$ και επειδή $4 < 5$, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[4, 5]$.

2.

Ισχύει ότι f στο $[0, 2]$, οπότε $f(A_1) = [f(2), f(0)] = [-2, 1]$,

Επειδή η f στο $[2, 4]$, θα ισχύει $f(A_2) = [f(2), f(4)] = [-2, 3]$ και επειδή η f στο $[4, 5]$ θα ισχύει $f(A_3) = [f(5), f(4)] = [-4, 3]$.

Άρα το σύνολο τιμών είναι το σύνολο $f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) \cup f(A_3) = [-4, 3]$.

3.

Ισχύει $0 \in [-2, 1]$ και η f στο $[0, 2]$, οπότε υπάρχει μια ακριβώς ρίζα $\rho_1 \in (0, 2)$.

Ομοίως $0 \in [-2, 3]$ και η f στο $[2, 4]$, οπότε υπάρχει μια ακριβώς ρίζα $\rho_2 \in (2, 4)$

και τέλος $0 \in [-4, 3]$ και η f στο $[4, 5]$ άρα υπάρχει μια ακριβώς ρίζα $\rho_3 \in (4, 5)$.

Συνεπώς η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς τρεις ρίζες στο διάστημα $[0, 5]$.

B.

$$\text{Ισχύει: } f^2(1) + f^2(4) = 2f(4) - 6f(1) - 10 \Leftrightarrow f^2(1) + 6f(1) + f^2(4) - 2f(4) + 10 = 0 \\ \Leftrightarrow f^2(1) + 6f(1) + 9 + f^2(4) - 2f(4) + 1 = 0 \Leftrightarrow (f(1) + 3)^2 + (f(4) - 1)^2 = 0$$

Άρα $f(1) = -3$ και $f(4) = 1$.

Επομένως επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[1,4]$ το σύνολο τιμών

$$f(A) = [f(1), f(4)] = [-3, 1]$$

Γ.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^5 - 24x + 3$, η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική, άρα θα είναι και συνεχής σε κάθε διάστημα.

Παρατηρούμε ότι $f(0) = 3 > 0$, $f(1) = -20 < 0$ και $f(3) = 3^5 - 24 \cdot 3 + 3 = 174 > 0$

Οπότε η f είναι συνεχής στο $[0, 1]$ και ισχύει $f(0) \cdot f(1) < 0$ άρα σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (0, 1)$, ώστε $f(\xi_1) = 0$.

Επίσης η f είναι συνεχής στο $[1, 3]$ και είναι $f(1) \cdot f(3) < 0$, οπότε από το θεώρημα Bolzano θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in (1, 3)$, ώστε $f(\xi_2) = 0$.

Άρα η εξίσωση $x^5 - 24x + 3 = 0$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο $(0, 3)$.

ΘΕΜΑ 4^ο

Α.

Για $x = 3$ είναι $f(f(3)) = 3^2 - 6 \cdot 3 + 12 \Leftrightarrow f(f(3)) = 3$.

$$\text{Άρα } f(f(f(3))) = f(3) \quad (1)$$

Όμως, αν όπου x στη σχέση $f(f(x)) = x^2 - 6x + 12$ (2) αντικαταστήσουμε το $f(3)$

Τηλ./Fax: 210.62.19.712, Τηλ: 210.6218.894 www.apolito.gr – e-mail: info@apolito.gr

Λεωφόρος Μαραθώνος & Χρυσοστόμου Σμύρνης 3, 14565 ΑΓΙΟΣ ΣΤΕΦΑΝΟΣ

προκύπτει : $f(f(f(3))) = f^2(3) - 6f(3) + 12 \quad (3)$

Από τις σχέσεις (1) και (3) προκύπτει ότι :

$$f^2(3) - 6f(3) + 12 = f(3) \Leftrightarrow f^2(3) - 7f(3) + 12 = 0 \Leftrightarrow f(3) = 3 \text{ ή } f(3) = 4$$

Για $x = 4$ η (2) γίνεται : $f(f(4)) = 4^2 - 6 \cdot 4 + 12 = 4$ και για $x = f(4)$ είναι

$$f(f(f(4))) = f^2(4) + 6f(4) + 12 \Leftrightarrow f(4) = f^2(4) - 7f(4) + 12 = 0 \Leftrightarrow f(4) = 3 \text{ ή } f(4) = 4$$

Άρα $f(3) = f(4) = 3$ ή $f(3) = f(4) = 4$ ή $f(3) = 3$ και $f(4) = 4$ ή $f(3) = 4$ και $f(4) = 3$.

Όμως η f είναι αντιστρέψιμη, οπότε και '1 -1', άρα $f(3)=3$ και $f(4)=4$ ή $f(3)=4$ και $f(4)=3$.

Και στις δύο περιπτώσεις ισχύει $f(3)+f(4)=7$.

B.

Έστω $\varphi(x) = 2f(x) - xg(x) \quad (1) \text{ με}$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \varphi(x) = -4$$

και $h(x) = (x - 1)f(x) + 4g(x) \quad (2) \text{ με}$

$$\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = 23$$

Πολλαπλασιάζουμε την (1) με 4 και την (2) με x προκειμένου με πρόσθεση κατά μέλη να απαλείψουμε την $g(x)$. Οπότε:

$$\left. \begin{array}{l} 4\varphi(x) = 8f(x) - 4xg(x) \\ xh(x) = (x^2 - x)f(x) + 4xg(x) \end{array} \right\} \begin{array}{l} (-1) \\ \Leftrightarrow \end{array} 4\varphi(x) + xh(x) = (x^2 - x + 8)f(x)$$

Επειδή $x^2 - x + 8 \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R} (\Delta = -31 < 0)$ τότε $f(x) = \frac{4\varphi(x) + xh(x)}{x^2 - x + 8}$, άρα :

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4\varphi(x) + xh(x)}{x^2 - x + 8} = 3$$

Από την (2) έχουμε:

$$4g(x) = h(x) - (x-1)f(x) \Leftrightarrow g(x) = \frac{h(x)-(x-1)f(x)}{4} \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{h(x) - (x-1)f(x)}{4} = \frac{23-3}{4} = 5$$

Γ.

Επειδή το σύνολο τιμών των f, g είναι το $[\alpha, \beta]$, θα ισχύει για κάθε

$$x \in [\alpha, \beta] \quad \alpha \leq f(x) \leq \beta \quad (1)$$

$$\text{και} \quad \alpha \leq g(x) \leq \beta \quad (2)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$h(x) = \mu f(x) + \nu g(x) - (\mu + \nu)x$$

η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ ως πράξη συνεχών συναρτήσεων.

Είναι

$$h(\alpha) = \mu f(\alpha) + \nu g(\alpha) - (\mu + \nu)\alpha = \mu\alpha + \nu g(\alpha) - \mu\alpha - \nu\alpha = \nu(g(\alpha) - \alpha)$$

Όμως από τη (2) για $x=\alpha$ έχουμε:

$$\alpha \leq g(\alpha) \leq \beta, \quad \text{δηλαδή} \quad g(\alpha) - \alpha \geq 0$$

$$\text{και } h(\beta) = \mu f(\beta) + \nu g(\beta) - (\mu + \nu)\beta = \mu f(\beta) + \nu\beta - \mu\beta - \nu\beta = \mu(f(\beta) - \beta)$$

Από την (1) για $x=\beta$ έχουμε:

$$\alpha \leq f(\beta) \leq \beta \Leftrightarrow f(\beta) - \beta \leq 0,$$

$$\text{οπότε } h(\alpha) \cdot h(\beta) = \mu\nu \cdot (g(\alpha) - \alpha)(f(\beta) - \beta) \leq 0$$

$$\text{αφου } \mu\nu > 0.$$

- Αν $h(\alpha) \cdot h(\beta) = 0$, τότε $h(\alpha) = 0$ ή $h(\beta) = 0$, δηλαδή $x_0 = \alpha$ ή $x_0 = \beta$

Τηλ./Fax: 210.62.19.712, Τηλ: 210.6218.894 www.apolito.gr – e-mail: info@apolito.gr

Λεωφόρος Μαραθώνος & Χρυσοστόμου Σμύρνης 3, 14565 ΑΓΙΟΣ ΣΤΕΦΑΝΟΣ



- Αν $h(a) \cdot h(\beta) < 0$, από το θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0 \in (a, \beta) : h(x_0) = 0$.

Τελικά υπάρχει:

$$x \in [a, \beta]: h(x_0) = 0 \Leftrightarrow \mu f(x_0) + \nu g(x_0) = (\mu + \nu)x_0.$$

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ
ΠΕΤΡΟΠΟΥΛΟΣ ΙΩΑΝΝΗΣ
ΜΠΑΤΖΑΚΑΣ ΜΙΧΑΛΗΣ