

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΑΛΓΕΒΡΑΣ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2x + 7$. Τότε:

- | | | |
|--|---|---|
| i. Ο αριθμός $x = -1$ είναι ρίζα του πολυωνύμου. | Σ | Λ |
| ii. Ο βαθμός του πολυωνύμου είναι 6. | Σ | Λ |
| iii. Το $x + 1$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου. | Σ | Λ |
| iv. Το πολυώνυμο μπορεί να έχει, το πολύ, 3 ρίζες. | Σ | Λ |

(8 μονάδες)

B. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 3x^2 + \sqrt{3}$.

- i. Να βρεθεί το $P(\sqrt{3})$.
- ii. Στην ακόλουθη διαίρεση να βρεθεί το πηλίκο και το υπόλοιπο,
 $P(x) : (x - \sqrt{3})$

(9 μονάδες)

Γ. i) Ποιες από τις παρακάτω παραστάσεις είναι πολυώνυμο του x ;

- α) $2 - x^3$ β) $1 + \frac{1}{x}$ γ) $x^4 - 3x^{-2} + 2x$
 δ) $\alpha^4 - 3\alpha x^2 + 2x$

ii) Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x + \lambda$.

Για ποια τιμή του λ το $P(x)$ διαιρείται διά του $x + 1$;

- α) Για $\lambda = 1$ β) Για $\lambda = -2$ γ) Για $\lambda = 0$
 δ) Για $\lambda = -1$ ε) Για $\lambda = 2$

(8 μονάδες)

ΘΕΜΑ 2^ο

A. Σε μια αριθμητική πρόοδο $\alpha_1 = 6$ και είναι $\alpha_{12} = 94$. Να βρείτε τη διαφορά ω και τον 10^ο όρο της προόδου.

(12 μονάδες)

B. Να βρείτε την αριθμητική πρόοδο της οποίας τα άθροισμα των 3 πρώτων όρων είναι ίσο με -3 και το άθροισμα των 5 πρώτων όρων είναι ίσο με 10.

(13 μονάδες)

ΘΕΜΑ 3^ο

A. Να βρεθούν τα κ, λ αν το πολυώνυμο:

$P(x) = x^4 + \kappa x^3 + \lambda x^2 + 2x + 4$ έχει παράγοντες τα $x - 2$ και $x + 1$. Να λυθεί η ανίσωση $P(x) > 0$.

(13 μονάδες)

B. Να λυθεί η ανίσωση: $\sqrt{x+3} > x - 4$. (1)

(12 μονάδες)

ΘΕΜΑ 4^ο

A. Σε μια αμφιθεατρική αίθουσα θεάτρου με 20 σειρές καθισμάτων το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς σχηματίζει αριθμητική πρόοδο. Η 1^η σειρά έχει 16 καθίσματα και η 7^η 28 καθίσματα.

α) Πόσα καθίσματα έχει η 10^η σειρά;

β) Πόσα καθίσματα υπάρχουν από την 4^η έως και τη 10^η σειρά;

(12 μονάδες)

B. Αν στην 1^η σειρά της αίθουσας αυτής υπάρχουν 6 κενά καθίσματα, στη 2^η υπάρχουν 9 κενά καθίσματα, στην 3^η 12 κτλ.:

α) από ποια σειρά και πέρα θα υπάρχουν μόνο κενά καθίσματα;

β) πόσοι θα είναι θεατές;

(13 μονάδες)

**ΟΙ ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ ΚΑΘΩΣ ΚΑΙ ΟΙ ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ ΘΑ
ΒΡΙΣΚΟΝΤΑΙ ΣΤΗΝ ΙΣΤΙΟΣΕΛΙΔΑ ΤΟΥ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟΥ ΜΑΣ**

www.apolito.gr

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΘΕΜΑΤΩΝ
ΜΠΑΤΖΑΚΑΣ ΜΙΧΑΛΗΣ
ΠΕΤΡΟΠΟΥΛΟΣ ΙΩΑΝΝΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

A. i. Σ

ii. Λ

iii. Σ

iv. Σ

B. i) Έχουμε ότι:

1	-3	0	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
	$\sqrt{3}$	$3 - 3\sqrt{3}$	$3\sqrt{3} - 9$	
1	$\sqrt{3} - 3$	$3 - 3\sqrt{3}$	$4\sqrt{3} - 9$	

άρα το $P(\sqrt{3}) = 4\sqrt{3} - 9$.

ii) Το πηλίκο της διαίρεσης είναι: $\pi(x) = x^2 + (\sqrt{3} - 3) \cdot x + 3 - 3\sqrt{3}$ και το υπόλοιπο $\nu = 4\sqrt{3} - 9$.

Γ. i) Πολυώνυμο είναι το (α) και το (δ)

ii) το (ε)

ΘΕΜΑ 2^ο

A. Έχουμε ότι: $\begin{cases} \alpha_1 = 6 \\ \alpha_1 + 11\omega = 94 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 6 \\ 11\omega = 88 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 6 \\ \omega = 8 \end{cases}$

τότε $\alpha_{10} = \alpha_1 + 9\omega = 6 + 9 \cdot 8 = 78$.

B. Έχουμε ότι: $S_3 = -3 \Leftrightarrow \frac{3}{2} \cdot [2\alpha_1 + (3-1) \cdot \omega] = -3$

$$\Leftrightarrow 3(\alpha_1 + \omega) = -3 \Leftrightarrow \alpha_1 = -1 - \omega \quad (1)$$

και $S_5 = 10 \Leftrightarrow \frac{5}{2} \cdot [2\alpha_1 + (5-1) \cdot \omega] = 10$

$$\Leftrightarrow 5 \cdot (\alpha_1 + 2\omega) = 10 \Leftrightarrow -1 - \omega + 2\omega = 2 \Leftrightarrow \omega = 3$$

και η (1) $\Leftrightarrow \alpha_1 = -4$.

ΘΕΜΑ 3^ο

Α. Έχουμε ότι: $P(2) = 0 \Leftrightarrow 16 + 8\kappa + 4\lambda + 4 + 4 = 0$

$$\Leftrightarrow 2\kappa + \lambda = -6 \Leftrightarrow \lambda = -6 - 2\kappa \quad (1)$$

και $P(-1) = 0 \Leftrightarrow 1 - \kappa + \lambda - 2 + 4 = 0 \Leftrightarrow -\kappa - 6 - 2\kappa + 3 = 0$

$$\Leftrightarrow -3\kappa = 3 \Leftrightarrow \kappa = -1$$

και (1) $\Leftrightarrow \lambda = -6 + 2 \Leftrightarrow \lambda = -4$

άρα $P(x) = x^4 - x^3 - 4x^2 + 2x + 4$

Έχουμε ότι:

1	-1	-4	2	4	2
	2	2	-4	-4	
1	1	-2	-2	0	

$$\begin{aligned} \text{άρα } (x-2) \cdot (x^3 + x^2 - 2x - 2) &\geq 0 \Leftrightarrow \\ (x-2) \cdot [x^2 \cdot (x+1) - 2(x+1)] &\geq 0 \Leftrightarrow \\ (x-2) \cdot (x+1) \cdot (x^2 - 2) &\geq 0 \end{aligned}$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	-1	$\sqrt{2}$	2	$+\infty$
$x-2$	-	-	-	-	-	+
$x+1$	-	-	+	+	+	+
x^2-2	+	-	-	+	+	+
$(x-2) \cdot (x+1) \cdot (x^2-2)$	+	-	+	-	+	+

άρα η λύση της ανίσωσης είναι $x \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (-1, \sqrt{2}) \cup (2, +\infty)$.

Β. Περιορισμοί $x+3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -3$.

Ι. Αν $x-4 < 0 \Leftrightarrow x < 4$ τότε η (1) ισχύει άρα τα $-3 \leq x < 4$ είναι λύσεις της (1).

$$\begin{aligned} \text{ΙΙ. Αν } x-4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 4 \text{ τότε η (1)} &\Leftrightarrow \sqrt{x+3} \geq (x-4)^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 \geq x+3 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 9x + 13 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{9-\sqrt{29}}{2} \leq x \leq \frac{9+\sqrt{29}}{2}. \end{aligned}$$

$$\Delta = 81 - 52 = 29$$

$$x_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{29}}{2}$$

x	$-\infty$	$\frac{9-\sqrt{29}}{2}$	$\frac{9+\sqrt{29}}{2}$
-----	-----------	-------------------------	-------------------------

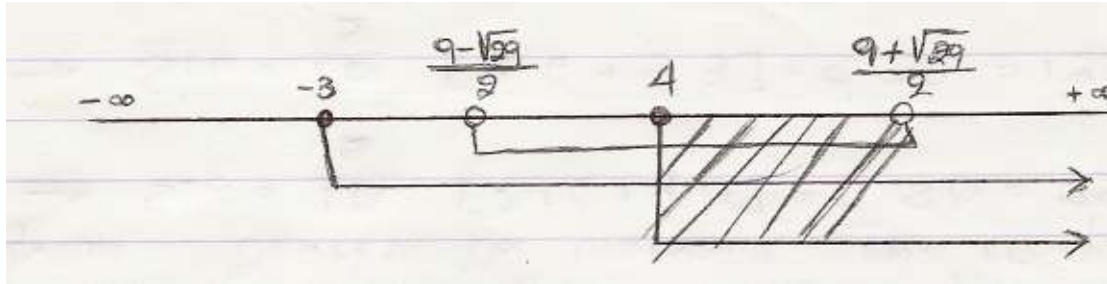
$$x^2 - 9x + 13$$

+

-

+

τότε



$$\text{άρα } 4 \leq x < \frac{9 + \sqrt{29}}{2}$$

οπότε συνολικά οι λύσεις της (1) είναι $-3 \leq x < \frac{9 + \sqrt{29}}{2}$.

ΘΕΜΑ 4^ο

α) Έχουμε α.π. με $\alpha_1 = 16$ και $\alpha_7 = 28 \Leftrightarrow \alpha_1 + 6\omega = 28 \Leftrightarrow 6\omega = 12 \Leftrightarrow \omega = 2$

οπότε $\alpha_{10} = \alpha_1 + 9\omega \Leftrightarrow \alpha_{10} = 16 + 9 \cdot 2 \Leftrightarrow \alpha_{10} = 34$.

$$\begin{aligned} \beta) \text{ Προφανώς } S_{10} - S_3 &= \frac{10}{2} \cdot [2 \cdot 16 + 9 \cdot 2] - \frac{3}{2} \cdot [2 \cdot 16 + 2 \cdot 2] = 5 \cdot 50 - 3 \cdot 18 \\ &= 250 - 54 = 196 \end{aligned}$$

οπότε από την 4^η έως και την 10^η σειρά υπάρχουν 196 καθίσματα.

Β. Οι αριθμοί κενών καθισμάτων ανά σειρά αποτελούν μια καινούρια α.π. (β_v) με

$\beta_1 = 6$ και διαφορά $\omega' = 3$.

α) Πρέπει $\beta_k \geq \alpha_k \Leftrightarrow \beta_1 + (k-1) \cdot 3 \geq \alpha_1 + (k-1) \cdot 2 \Leftrightarrow$

$$6 + 3k - 3 \geq 16 + 2k - 2 \Leftrightarrow k \geq 11$$

Άρα από την 11^η σειρά θα υπάρχουν μόνο κενά καθίσματα.

β) Προφανώς θεατές θα υπάρχουν μόνο στις 10 πρώτες σειρές.

$$\alpha_v \rightarrow S_{10} = \frac{10}{2} \cdot [2 \cdot 16 + 9 \cdot 2] = 5 \cdot 50 = 250$$

$$\beta_v \rightarrow S'_{10} = \frac{10}{2} \cdot [2 \cdot 6 + 9 \cdot 3] = 5 \cdot 39 = 195$$

Άρα θα υπάρχουν $S_{10} - S'_{10} = 250 - 195 = 55$ θεατές.

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ
ΜΠΑΤΖΑΚΑΣ ΜΙΧΑΗΛΗΣ
ΠΕΤΡΟΠΟΥΛΟΣ ΙΩΑΝΝΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ

