

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1^ο

Α. Δίνεται ο κύκλος $x^2 + y^2 = \rho^2$ και το σημείο του $A(x_1, y_1)$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου στο Α είναι η $xx_1 + yy_1 = \rho^2$.

10 μονάδες

Β. Να γράψετε τον ορισμό της παραβολής.

5 μονάδες

Γ. Να χαρακτηρίσετε ως σωστές (Σ) ή λάθος (Λ) τις παρακάτω προτάσεις:

1. Το διάνυσμα $\vec{a} = (A, B)$ είναι παράλληλο στην ευθεία $Ax + By + \Gamma = 0$.
2. Η παραβολή $y^2 = 2px$ έχει άξονα ασυμμετρίας τον $y'y$.
3. Οι κύκλοι $x^2 + y^2 = 1$ και $(x-1)^2 + y^2 = 1$ εφάπτονται εξωτερικά.
4. Δύο κύκλοι με διακεντρική απόσταση ίση με $\rho_1 + \rho_2$ εφάπτονται εσωτερικά.
5. Δύο ευθείες που ταυτίζονται έχουν ίσους συντελεστές διεύθυνσης.

10 μονάδες

ΘΕΜΑ 2^ο

Α. Έστω η παραβολή $C: y^2 = 2x$ και το σημείο της $A(2,4)$. Να βρεθούν:

- i. Η εξίσωση της εφαπτομένης της C στο Α.
- ii. Η εξίσωση της κάθετης στην εφαπτομένη της C στο Α.

15 μονάδες

Β. Έστω η παραβολή $y^2 = 4x$. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής που είναι κάθετη στην ευθεία $\varepsilon: 3x + y + 3 = 0$.

10 μονάδες

ΘΕΜΑ 3^ο

Α. Να βρείτε την εξίσωση κύκλου που έχει κέντρο $K(3, -1)$ και αποκόπτει από την ευθεία $2x - 5y + 18 = 0$ χορδή μήκους 6.

8 μονάδες

Β.

- i. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $x + y - 4 = 0$ τέμνει τον κύκλο $C: x^2 + y^2 - 2x + 2y - 8 = 0$ σε δυο σημεία Α και Β.

7 μονάδες

- ii. Να αποδείξετε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό λ η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2x + 24 - 8 + \lambda(x + y - 4) = 0$ παριστάνει κύκλο ο οποίος διέρχεται από τα σημεία Α και Β.

10 μονάδες

ΘΕΜΑ 4^ο

Α. Δίνονται οι κύκλοι $C_1 : x^2 + y^2 = 4$ και $C_2 : x^2 + y^2 = 4x$. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ ώστε η εφαπτομένη από το Μ προς τον C_1 να έχει μήκος τετραπλάσιο της εφαπτομένης από το Μ προς τον C_2 .

20 μονάδες

Β. Να βρείτε την εξίσωση της (των) κατακόρυφης εφαπτομένης του κύκλου $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$.

5 μονάδες

Καλή επιτυχία!!!

**ΟΙ ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ ΚΑΘΩΣ ΚΑΙ ΟΙ ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ ΘΑ ΒΡΙΣΚΟΝΤΑΙ
ΣΤΗΝ ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΤΟΥ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟΥ ΜΑΣ**

www.apolito.gr

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΘΕΜΑΤΩΝ
ΠΕΤΡΟΠΟΥΛΟΣ ΓΙΑΝΝΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Θεωρία σχολικού βιβλίου

B. Θεωρία σχολικού βιβλίου

Γ.

1. Λ
2. Λ
3. Σ
4. Λ
5. Σ

ΘΕΜΑ 2^ο

A.

i. Η εξίσωση εφαπτομένης της C στο $A(2,4)$ είναι:

$$y^4 = p(x+2)^{p-1} \Leftrightarrow 4y = x+2 \Leftrightarrow y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2} \quad (\epsilon)$$

ii. Η κάθετη στην C στο A είναι ευθεία κάθετη στην εφαπτομένη (ϵ) οπότε θα έχει $\lambda = -4$. Άρα η εξίσωση της είναι: $y - 4 = -4(x - 2)$ ή $y - 4 = -4x + 8$ ή $y = -4x + 12$.

B. Είναι $\lambda_{\epsilon} = -3$. Η εφαπτομένη της παραβολής είναι κάθετη στην ϵ άρα $\lambda_{\epsilon\varphi} = \frac{1}{3}$.

Η εφαπτομένη έχει εξίσωση της μορφής $y = \frac{1}{3}x + \kappa$.

Γνωρίζουμε ότι η εξίσωση $y = \alpha x + \beta$ εφάπτεται της $y^2 = 2px$ αν $p = 2\alpha\beta$.

Οπότε από την σχέση $p = 2\frac{1}{3}\kappa$ έχουμε $\kappa = 3$.

Άρα η ζητούμενη εξίσωση εφαπτομένης είναι η $y = \frac{1}{3}x + 3$.

ΘΕΜΑ 3^ο

A. Η απόσταση του κέντρου K από την ευθεία $2x - 5y + 12 = 0$ είναι:

$$(KM) = \frac{|2 \cdot 3 - 5(-1) + 12|}{\sqrt{2^2 + 5^2}} = \frac{29}{\sqrt{29}} = \sqrt{29}.$$

Επειδή το M είναι μέσο της AB, από το ορθογώνιο τρίγωνο AKM έχουμε:

$$(KA)^2 = (KM)^2 + (MA)^2 \text{ ή } (KA)^2 = (\sqrt{29})^2 + 3^2 \text{ ή } (KA)^2 = 38.$$

Άρα η ακτίνα του κύκλου είναι $\rho = \sqrt{38}$ και η εξίσωσή του είναι:

$$C : (x-3)^2 + (y+1)^2 = 38.$$

B.

i. Το κέντρο του κύκλου είναι: $K\left(\frac{-A}{2}, \frac{-B}{2}\right)$ ή $K\left(-\frac{2}{2}, -\frac{2}{2}\right)$ ή $K(1, -1)$.

$$\text{Η απόσταση του κέντρου K από την } \varepsilon \text{ είναι: } d(K, \varepsilon) = \frac{|1 \cdot 1 + 1(-1) - 4|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 2\sqrt{2} = \sqrt{8}.$$

Η ακτίνα του κύκλου είναι:

$$\rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2} = \frac{\sqrt{(-2)^2 + 2^2 - 4(-8)}}{2} = \frac{\sqrt{40}}{2} = \sqrt{10}.$$

Επειδή $\sqrt{8} < \sqrt{10}$ ή $d(K, \varepsilon) < \rho$ η ευθεία τέμνει τον κύκλο σε δυο σημεία A, B.

ii. Η εξίσωση του κύκλου γίνεται $C : x^2 + y^2 - 2x + 2y - 8 + \lambda x + \lambda y - 4\lambda = 0$ ή

$$C : x^2 + y^2 + (\lambda - 2)x + (\lambda + 2)y - 4(2 + \lambda) = 0$$

άρα $A = \lambda - 2$, $B = \lambda + 2$, $\Gamma = -4(2 + \lambda)$ και

$$A^2 + B^2 - 4\Gamma = (\lambda - 2)^2 + (\lambda + 2)^2 + 16(2 + \lambda) = 2\lambda^2 + 16\lambda + 40 = 2(\lambda^2 + 8\lambda + 20) > 0$$

γιατί είναι $\lambda^2 + 8\lambda + 20 > 0$ παντού αφού $\Delta = 64 - 80 = -16 < 0$.

ΘΕΜΑ 4^ο

Το κέντρο K του C_1 είναι $K(0,0)$ και το κέντρο Λ του C_2 είναι $\Lambda(2,0)$ γιατί

$$C_2 : x^2 + y^2 - 4x = 0 \text{ ή } C_2 : x^2 - 4x + 4 + y^2 = 4 \text{ ή } C_2 : (x-2)^2 + y^2 = 2^2.$$

Είναι: $(KA) = \rho_1 = 2$ και $(\Lambda B) = \rho_2 = 2$.

$$\text{Επίσης } (KM) = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, (\Lambda M) = \sqrt{(\alpha - 2)^2 + \beta^2}.$$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο AKM έχουμε:

$$(AM)^2 = (KM)^2 - (AK)^2 = (\alpha^2 + \beta^2) - 4 = \alpha^2 + \beta^2 - 4 \quad (1).$$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο MΛB έχουμε:

$$(MB)^2 = (ML)^2 - (LB)^2 = (\alpha - 2)^2 + \beta^2 - 4 \quad (2).$$

$$\text{Πρέπει: } (MA) = 4(MB) \text{ ή } (MA)^2 = 16(MB)^2 \text{ ή } \alpha^2 + \beta^2 - 4 = 16[(\alpha - 2)^2 + \beta^2 - 4] \text{ ή}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 - 4 = 16(\alpha^2 + 4 - 4\alpha + \beta^2 - 4) \text{ ή } 15\alpha^2 + 15\beta^2 - 64\alpha + 4 = 0.$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M είναι ο κύκλος $C_3 : 15x^2 + 15y^2 - 64x = 0$.

Β. Το κέντρο του κύκλου είναι: $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ και η ακτίνα του $\rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2}$.

Οι εξισώσεις των κατακόρυφων εφαπτόμενων είναι $\varepsilon_1 : x = x_0 + \rho$ και

$\varepsilon_2 : x = x_0 - \rho$, όπου x_0 η τετμημένη του κέντρου Κ. Άρα:

$$\varepsilon_1 : x = -\frac{A}{2} + \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2} \text{ και } \varepsilon_2 : x = -\frac{A}{2} - \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2}.$$

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ
ΠΕΤΡΟΠΟΥΛΟΣ ΓΙΑΝΝΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ