

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω ερωτήσεις ως σωστές (Σ) ή λάθος (Λ):

1. Αν $\vec{a} // y'y$, τότε ο συντελεστής διανύσματος του $\vec{a}$ είναι 0.
2. Αν $A(\rho \sin \varphi, \rho \eta \mu \varphi)$, $B(\rho \eta \mu \varphi, -\rho \sin \varphi)$ με $\rho > 0$, τότε $|\overrightarrow{AB}| = \rho\sqrt{2}$.
3. Τα σημεία $A(1,2)$, $B(3,5)$, $\Gamma(0,4)$ και $\Delta(-2,1)$ είναι κορυφές παραλληλογράμμου.
4. Είναι $\det(j,i)=1$.
5. Αν $A(-3,5)$ και $B(8,10)$, τότε $\overrightarrow{AB} = 5\vec{i} + 5\vec{j}$.
6. Είναι $\det(\vec{u}, \vec{u}) = 0$.
7. Το συμμετρικό του $M(2,6)$ ως το σημείο $K(4,6)$ είναι το $M'(6,6)$.
8. Το διάνυσμα $\vec{a} = (-\eta \mu \theta, -\sin \theta)$ έχει μέτρο 1.

B. Να σημειώσετε τη σωστή απάντηση στις παρακάτω ερωτήσεις:

1. Οι τιμές των $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$, για τις οποίες τα διανύσματα $\vec{u} = (\kappa^2 + \lambda^2, 4)$ και $\vec{v} = (\kappa - \lambda - 2, 1)$ είναι παράλληλα, είναι:
 A. $\begin{cases} \kappa = -2 \\ \lambda = 2 \end{cases}$ B. $\begin{cases} \kappa = 2 \\ \lambda = 2 \end{cases}$ Γ. $\begin{cases} \kappa = 2 \\ \lambda = -2 \end{cases}$ Δ. $\begin{cases} \kappa = -2 \\ \lambda = -2 \end{cases}$
2. Αν $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, όπου $A(3,-2)$ και $B(-5,8)$, $\Gamma(3,-9)$, τότε το σημείο Δ είναι:
 A. $(3,9)$ B. $(-3,-9)$ Γ. $(3,-9)$ Δ. $(-1,-4)$
3. Αν $\vec{u} = (1,3)$ και $\vec{v} = (-2,4)$, τότε το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (4,2)$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των $\vec{u}$ και $\vec{v}$ ως:
 A. $\vec{\alpha} = 2\vec{u} - \vec{v}$ B. $\vec{\alpha} = \vec{u} - 2\vec{v}$ Γ. $\vec{\alpha} = 2\vec{u} + \vec{v}$ Δ. $\vec{\alpha} = \vec{u} + 2\vec{v}$
4. Δίνεται το διάνυσμα $\vec{u} = (-3, \sqrt{3})$. Παράλληλο προς το διάνυσμα $\vec{u}$ είναι:
 A. $\vec{\alpha} = (1, \sqrt{3})$ B. $\vec{\beta} = (\sqrt{3}, -1)$ Γ. $\vec{\gamma} = (1, -\sqrt{3})$ Δ. $\vec{\delta} = (-1, -\sqrt{3})$
5. Το διάνυσμα $\vec{u} = (\kappa^2 - \kappa - 12, \kappa + 3)$ είναι μηδενικό όταν:
 A. $\kappa = 3$ B. $\kappa = -3$ Γ. $\kappa = 4$ Δ. $\kappa = -4$
6. Αν $A(7,-5)$ και $B(3,-2)$, τότε η απόσταση AB είναι:
 A. 3 B. 4 Γ. 6 Δ. 5
7. Το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (-2, \sqrt{12})$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία
 A. $\frac{2\pi}{3}$ B. $\frac{\pi}{3}$ Γ. $\frac{5\pi}{3}$ Δ. $\frac{4\pi}{3}$

25 μονάδες

ΘΕΜΑ 2°

Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δίνεται ότι $|\vec{\alpha}|=1$, $|\vec{\beta}|=2$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})=\frac{\pi}{3}$. Έστω τα

διανύσματα $\vec{u}=2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}$, $\vec{v}=\vec{\alpha}-2\vec{\beta}$.

Να υπολογίσετε:

- | | |
|---|-----------|
| i. Το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$. | 6 μονάδες |
| ii. Τα μέτρα $ \vec{u} , \vec{v} $. | 6 μονάδες |
| iii. Το εσωτερικό γινόμενο $\vec{u} \cdot \vec{v}$. | 6 μονάδες |
| iv. Το συνημίτονο της γωνίας $(\vec{u}, \vec{v})$. | 7 μονάδες |

ΘΕΜΑ 3°

A. Δίνονται τα σημεία $A(-4,2)$ και $B(2,0)$. Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου του τμήματος AB.

5 μονάδες

B. Δίνονται τα σημεία $A(8,0)$ και $B(0,4)$ του καρτεσιανού επιπέδου Oxy.

- | | |
|---|-----------|
| i. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που ορίζεται από την αρχή O των αξόνων και το μέσο Δ του τμήματος AB. | 5 μονάδες |
| ii. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) που διέρχεται από το σημείο Δ και είναι κάθετη στην OΔ. | 6 μονάδες |
| iii. Έστω M τυχαίο σημείο της παραπάνω ευθείας (ε) . Να αποδείξετε ότι:
$\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = 2\overrightarrow{OM}^2$. | 9 μονάδες |

ΘΕΜΑ 4°

A. Να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{\alpha}=(2,3)$ σε δύο συνιστώσες, μια παράλληλη στο $\vec{\beta}=(-1,3)$ και μια κάθετη στο $\vec{\beta}$.

10 μονάδες

B. Δίνεται τρίγωνο ABΓ και σημείο P για το οποίο ισχύει:

$$|\overrightarrow{PA}|=|\overrightarrow{PB}|=|\overrightarrow{PG}|=\lambda > 0 \text{ και } \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PG} = \vec{0}.$$

Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ABΓ είναι ισόπλευρο.

15 μονάδες

**ΟΙ ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ ΚΑΘΩΣ ΚΑΙ ΟΙ ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ ΘΑ ΒΡΙΣΚΟΝΤΑΙ
ΣΤΗΝ ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΤΟΥ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟΥ ΜΑΣ**

www.apolito.gr

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΘΕΜΑΤΩΝ
ΠΕΤΡΟΠΟΥΛΟΣ ΓΙΑΝΝΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

A.

1. Λ
2. Σ
3. Σ
4. Λ
5. Λ
6. Σ
7. Σ
8. Σ

B.

1. Γ
2. Δ
3. Α
4. Γ
5. Β
6. Δ
7. Δ

ΘΕΜΑ 2^ο

- i. Είναι: $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \cos \nu \frac{\pi}{3} = 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$.
- ii. $|\vec{u}|^2 = (2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta})^2 = 4\vec{\alpha}^2 + 9\vec{\beta}^2 + 12\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 4|\vec{\alpha}|^2 + 9|\vec{\beta}|^2 + 12 \cdot 1 =$
 $= 4 \cdot 1^2 + 9 \cdot 2^2 + 12 = 52$ άρα $|\vec{u}| = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$
 $|\vec{v}|^2 = (\vec{\alpha} - 2\vec{\beta})^2 = \vec{\alpha}^2 - 4\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + 4\vec{\beta}^2 = |\vec{\alpha}|^2 - 4 \cdot 1 + 4|\vec{\beta}|^2 = 1 - 4 + 4 \cdot 2^2 = 13$
Άρα $|\vec{v}| = \sqrt{13}$.
- iii. $\vec{u} \cdot \vec{v} = (2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}) = 2\vec{\alpha}^2 - 4\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + 3\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - 6\vec{\beta}^2 =$
 $= 2|\vec{\alpha}|^2 - \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - 6|\vec{\beta}|^2 = 2 \cdot 1^2 - 1 - 6 \cdot 2^2 = -23$.
- iv. $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{-23}{2\sqrt{13} \cdot \sqrt{13}} = -\frac{23}{26}$.

ΘΕΜΑ 3^ο

A. Έστω M το μέσο του AB. Τότε για τις συντεταγμένες του M ισχύει:

$$\begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = -1 \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = 1 \end{cases} \text{ . Δηλαδή } M(-1,1).$$

Η ευθεία AB έχει συντελεστή διεύθυνσης: $\lambda_{AB} = \frac{0-2}{2+4} = -\frac{1}{3}$.

Αν ε η μεσοκάθετη του AB, ισχύει: $\varepsilon \perp AB \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon \cdot \lambda_{AB} = -1 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = 3$.

Επομένως η ε έχει εξίσωση: $y-1=3(x+1) \Leftrightarrow y=3x+4$.

B.

i. Για τις συντεταγμένες του Δ ισχύει:
$$\begin{cases} x_\Delta = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{8+0}{2} = 4 \\ y_\Delta = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{0+4}{2} = 2 \end{cases} \text{ . Δηλαδή } \Delta(4,2).$$

Η ευθεία ΟΔ έχει συντελεστή διεύθυνσης: $\lambda_{OD} = \frac{2-0}{4-0} = \frac{1}{2}$ και εξίσωση: $y = \frac{1}{2}x$.

ii. Είναι: $\varepsilon \perp OD \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon \cdot \lambda_{OD} = -1 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon \cdot \frac{1}{2} = -1 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = -2$.

Η ε έχει εξίσωση: $y-2=-2(x-4) \Leftrightarrow y=-2x+10$.

iii. Έστω $M(x, y)$ σημείο της ε . Τότε $y = -2x+10$.

Είναι: $|\overrightarrow{MA}| = \sqrt{(8-x)^2 + (0-y)^2} = \sqrt{64+x^2-16x+y^2}$

και $|\overrightarrow{MB}| = \sqrt{(0-x)^2 + (4-y)^2} = \sqrt{x^2+16-8y+y^2}$ και $|\overrightarrow{OM}| = \sqrt{x^2+y^2}$.

Οπότε: $\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = 2\overrightarrow{OM}^2 \Leftrightarrow |\overrightarrow{MA}|^2 + |\overrightarrow{MB}|^2 = 2|\overrightarrow{OM}|^2 \Leftrightarrow$

$$64+x^2-16x+y^2+x^2+16-8y+y^2 = 2(x^2+y^2) \Leftrightarrow$$

$$80+2x^2-16x+2y^2-8y = 2x^2+2y^2 \Leftrightarrow$$

$$8y = -16x+80 \Leftrightarrow$$

$$y = -2x+10, \text{ που ισχύει.}$$

ΘΕΜΑ 4^ο

A. Έστω $\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$ (1) με $\vec{a}_1 \parallel \vec{\beta}$, δηλαδή $\vec{a}_1 = \lambda \vec{\beta}$ και $\vec{a}_2 \perp \vec{\beta}$, οπότε $\vec{a}_2 \cdot \vec{\beta} = 0$.

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της (1) με $\vec{\beta}$ και έχουμε

$$\vec{a} \cdot \vec{\beta} = \vec{a}_1 \cdot \vec{\beta} + \vec{a}_2 \cdot \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{\beta} = \lambda \cdot \vec{\beta} \cdot \vec{\beta} + 0 \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{\beta} = \lambda |\vec{\beta}|^2 \Leftrightarrow$$

$$2(-1)+3(-3) = \lambda \cdot 10 \Leftrightarrow -11 = \lambda \cdot 10 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{11}{10}.$$

Άρα $\vec{\alpha}_1 = -\frac{11}{10}(-1, 3) = \left(\frac{11}{10}, -\frac{33}{10}\right)$ και από της (1):

$$\vec{\alpha}_2 = \vec{\alpha} - \vec{\alpha}_1 = (2, -3) - \left(\frac{11}{10}, -\frac{33}{10}\right) \Leftrightarrow \vec{\alpha}_2 = \left(\frac{9}{10}, \frac{3}{10}\right).$$

$$\text{Άρα } \vec{\alpha} = \left(\frac{11}{10}, -\frac{33}{10}\right) + \left(\frac{9}{10}, \frac{3}{10}\right).$$

Β. Είναι $\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PG} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{PA} + \vec{PB} = -\vec{PG}$.

Άρα:

$$\left(\vec{PA} + \vec{PB}\right)^2 = \left(-\vec{PG}\right)^2 \Leftrightarrow \vec{PA}^2 + 2\vec{PA} \cdot \vec{PB} + \vec{PB}^2 = \vec{PG}^2 \Leftrightarrow$$

$$\left|\vec{PA}\right|^2 + 2\vec{PA} \cdot \vec{PB} \cdot \cos(\angle APB) + \left|\vec{PB}\right|^2 = \left|\vec{PG}\right|^2 \Leftrightarrow$$

$$\lambda^2 + 2\lambda \cdot \lambda \cos(\angle APB) + \lambda^2 = \lambda^2 \Leftrightarrow$$

$$2\lambda^2 \cos(\angle APB) = -\lambda^2 \Leftrightarrow$$

$$\cos(\angle APB) = -\frac{1}{2}$$

Άρα:

$$\left(\angle APB\right) = 120^\circ$$

Όμοια αποδεικνύεται ότι $\left(\angle APB, \angle BPG\right) = \left(\angle BPG, \angle PGA\right) = 120^\circ$.

Τότε για τις πλευρές του τριγώνου ABΓ έχουμε:

$$\left|\vec{AB}\right|^2 = \left|\vec{PB} - \vec{PA}\right|^2 = \vec{PB}^2 + \vec{PA}^2 - 2\vec{PA} \cdot \vec{PB} = \left|\vec{PB}\right|^2 + \left|\vec{PA}\right|^2 - 2\left|\vec{PA}\right| \cdot \left|\vec{PB}\right| \cos 120^\circ =$$

$$= \lambda^2 + \lambda^2 - 2\lambda \cdot \lambda \left(-\frac{1}{2}\right) = 3\lambda^2 \Leftrightarrow \left|\vec{AB}\right| = \lambda\sqrt{3} \quad (1)$$

$$\left|\vec{AG}\right|^2 = \left|\vec{PG} - \vec{PA}\right|^2 = \vec{PG}^2 + \vec{PA}^2 - 2\vec{PG} \cdot \vec{PA} = \lambda^2 + \lambda^2 - 2\lambda^2 \cos 120^\circ = 3\lambda^2 =$$

$$\left|\vec{AG}\right| = \lambda\sqrt{3} \quad (2)$$

$$\text{Όμοια αποδεικνύεται ότι } \left|\vec{BG}\right| = \lambda\sqrt{3} \quad (3)$$

Οπότε από τις σχέσεις (1), (2) και (3) προκύπτει ότι το τρίγωνο ABΓ είναι ισόπλευρο.

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ
ΠΕΤΡΟΠΟΥΛΟΣ ΓΙΑΝΝΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ