

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Θέμα 1^ο

Α) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω ερωτήσεις ως σωστές (Σ) ή λάθος (Λ):

- I) Αν $(\vec{\beta} + \vec{\gamma}) \parallel \vec{\gamma}$, τότε $(\vec{\beta} + \vec{\gamma}) \parallel \vec{\beta}$.
II) Αν $|\vec{\alpha}|\vec{\beta} = |\vec{\gamma}|\vec{\beta}$, τότε $|\vec{\alpha}| = |\vec{\gamma}|$.
III) Το συμμετρικό του σημείου $M(2,5)$ ως προς το σημείο $K(4,6)$ είναι το σημείο $M'(6,6)$.
IV) Τα σημεία $A(1,2), B(3,5), \Gamma(0,4)$ και $\Delta(-2,1)$ είναι κορυφές παραλληλογράμμου.

Β) Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα σημεία K, Λ και M , τέτοια ώστε:

$$\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{\Gamma\Lambda} = \frac{1}{3} \overrightarrow{B\Gamma} \text{ και } \overrightarrow{AM} = \frac{2}{3} \overrightarrow{A\Gamma}.$$

- I) Αν $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = \vec{\beta}$, να εκφράσετε τα $\overrightarrow{K\Lambda}, \overrightarrow{KM}$ συναρτήσει των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.
II) Να αποδείξετε ότι τα σημεία K, Λ, M είναι συνευθειακά.

Θέμα 2^ο

Α) Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$ και $\overrightarrow{A\Delta} = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta}$. Αν

$|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 2$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$, να βρείτε τα μήκη των διαγώνιων του παραλληλογράμμου.

Β) Να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (2, -3)$ σε δύο συνιστώσες, μια παράλληλη στο $\vec{\beta} = (-1, 3)$ και μια κάθετη στο $\vec{\beta}$.

Θέμα 3^ο

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2 + y^2 + 2xy - 3x - 3y + 2 = 0$ παριστάνει δύο παράλληλες ευθείες. Στη συνέχεια, να βρεθεί το εμβαδόν του τραπεζίου που σχηματίζουν οι ευθείες αυτές με τους άξονες.

Θέμα 4^ο

A) Δίνεται η εξίσωση $\varepsilon: (3\lambda^2 + \lambda + 2)x - (2\lambda^2 + \lambda + 1)y + \lambda - 1 = 0, \lambda \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

- I) Η ε παριστάνει εξίσωση ευθείας, για κάθε τιμή της παραμέτρου λ .
II) Η ε διέρχεται από σταθερό σημείο.

B) Δύο σημεία A και B κινούνται επί των θετικών ημιαξόνων Ox και Oy αντίστοιχα έτσι, ώστε $\frac{1}{(OA)} + \frac{1}{(OB)} = 4$. Να αποδείξετε ότι η ευθεία AB διέρχεται από σταθερό σημείο.

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ ΚΑΘΩΣ ΚΑΙ ΟΙ ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ ΘΑ
ΒΡΙΣΚΟΝΤΑΙ ΣΤΗΝ ΙΣΤΙΟΣΕΛΙΔΑ ΤΟΥ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟΥ ΜΑΣ
www.apolito.gr

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΘΕΜΑΤΩΝ
ΠΕΤΡΟΠΟΥΛΟΣ ΙΩΑΝΝΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Θέμα 1^ο

A) I. (Σ)

II. (Λ)

III. (Λ)

IV. (Σ)

$$\begin{aligned} \text{B). I. } \overrightarrow{KL} &= \overrightarrow{AL} - \overrightarrow{AK} = -\frac{1}{3}\vec{\alpha} + \frac{4}{3}\vec{\beta} - \frac{1}{3}\vec{\alpha} = -\frac{2}{3}\vec{\alpha} + \frac{4}{3}\vec{\beta} \\ \overrightarrow{KM} &= \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\vec{\beta} - \frac{1}{3}\vec{\alpha} \end{aligned}$$

II. Παρατηρούμε $\overrightarrow{2KM} = \overrightarrow{KL}$ άρα τα Κ,Λ,Μ: συνευθειακά

Θέμα 2^ο

$$\text{A) Είναι: } \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \vec{\alpha} + 2\vec{\beta} + 2\vec{\alpha} - \vec{\beta} = 3\vec{\alpha} + \vec{\beta}$$

$$\text{και } \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta} - \vec{\alpha} - 2\vec{\beta} = \vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$$

$$\text{Επίσης: } \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \cos \frac{\pi}{3} = 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 2.$$

$$\begin{aligned} \text{Οπότε: } |\overrightarrow{AG}|^2 &= (3\vec{\alpha} + \vec{\beta})^2 = 9\vec{\alpha}^2 + 6\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta}^2 = 9|\vec{\alpha}|^2 + 6 \cdot 2 + |\vec{\beta}|^2 \\ &= 9 \cdot 2^2 + 12 + 2^2 = 52 \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } |\overrightarrow{AG}| = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$$

$$|\overrightarrow{BD}|^2 = (\vec{\alpha} - 3\vec{\beta})^2 = \vec{\alpha}^2 - 6\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + 9\vec{\beta}^2 = |\vec{\alpha}|^2 - 6 \cdot 2 + 9|\vec{\beta}|^2 = 4 - 12 + 36 = 28$$

$$\text{Άρα } |\overrightarrow{BD}| = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$$

Β) Έστω $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2$ (1) με $\vec{\alpha}_1 \parallel \vec{\beta}$, δηλαδή $\vec{\alpha}_1 = \lambda \vec{\beta}$ και $\vec{\alpha}_2 \perp \vec{\beta}$, οπότε $\vec{\alpha}_2 \cdot \vec{\beta} = 0$.

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της (1) με $\vec{\beta}$ και έχουμε

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \vec{\alpha}_1 \cdot \vec{\beta} + \vec{\alpha}_2 \cdot \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \lambda \cdot \vec{\beta} \cdot \vec{\beta} + 0 \Leftrightarrow$$

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \lambda |\vec{\beta}|^2 \Leftrightarrow 2(-1) + 3(-3) = \lambda \cdot 10 \Leftrightarrow -11 = \lambda \cdot 10 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{11}{10}.$$

Άρα $\vec{\alpha}_1 = -\frac{11}{10}(-1, 3) = \left(\frac{11}{10}, \frac{33}{10}\right)$ και από την (1):

$$\vec{\alpha}_2 = \vec{\alpha} - \vec{\alpha}_1 = (2, -3) - \left(\frac{11}{10}, \frac{33}{10}\right) \Leftrightarrow \vec{\alpha}_2 = \left(\frac{9}{10}, \frac{3}{10}\right).$$

$$\text{Άρα } \vec{\alpha} = \left(\frac{11}{10}, \frac{33}{10}\right) + \left(\frac{9}{10}, \frac{3}{10}\right).$$

Θέμα 3°

Θα θεωρήσουμε την εξίσωση: $x^2 + y^2 + 2xy - 3x - 3y + 2 = 0 \Leftrightarrow$

$x^2 + (2y - 3)x + (y^2 - 3y + 2) = 0$, ως τριώνυμο ως προς x . Είναι:

$$\Delta = (2y - 3)^2 - 4 \cdot (y^2 - 3y + 2) = 4y^2 - 12y + 9 - 4y^2 + 12y - 8 = 1 > 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-(2y - 3) \pm 1}{2} = \begin{cases} 2 - y \\ 1 - y \end{cases}$$

Δηλαδή: $x = 2 - y \Leftrightarrow x + y - 2 = 0$ ή $x = 1 - y \Leftrightarrow x + y - 1 = 0$.

Επομένως η αρχική εξίσωση παριστάνει τις ευθείες $\varepsilon_1 : x + y - 2 = 0$ και

$\varepsilon_2 : x + y - 1 = 0$ και, επειδή $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, ισχύει: $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$.

Η ευθεία ε_1 τέμνει τους άξονες στα σημεία $\Gamma(2, 0)$ και $\Delta(0, 2)$

ενώ η ε_2 τέμνει τους άξονες στα σημεία $A(0, 1)$ και $B(1, 0)$.

Για να υπολογίσουμε το εμβαδόν E του τραπεζίου $AB\Gamma\Delta$ πρέπει να βρούμε τα μήκη: (AB) , $(\Gamma\Delta)$ και $v = d(A, \varepsilon_1)$.

Από το πυθαγόρειο θεώρημα ισχύει:

$$(AB)^2 = 1^2 + 1^2 = 2 \Leftrightarrow (AB) = \sqrt{2} \text{ και } (\Gamma\Delta)^2 = 2^2 + 2^2 = 8 \Leftrightarrow (\Gamma\Delta) = 2\sqrt{2}.$$

$$v = d(A, \varepsilon_1) = \frac{|0 + 1 - 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Οπότε } E = \frac{((AB) + (\Gamma\Delta)) \cdot v}{2} = \frac{(\sqrt{2} + 2\sqrt{2}) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{3}{2} \text{ τ.μ.}$$

Θέμα 4°

A)

I. Για να μην είναι η ε εξίσωση ευθείας, πρέπει:

$$\begin{cases} 3\lambda^2 + \lambda + 2 = 0 \\ 2\lambda^2 + \lambda + 1 = 0 \end{cases}, \text{ που είναι αδύνατο, αφού και οι δύο εξισώσεις } \\ \text{έχουν } \Delta < 0.$$

Οπότε η ε είναι εξίσωση ευθείας για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

II. 1^{ος} τρόπος:

$$\begin{aligned} \text{Είναι: } (3\lambda^2 + \lambda + 2)x - (2\lambda^2 + \lambda + 1)y + \lambda - 1 &= 0 \Leftrightarrow \\ 3\lambda^2 x + \lambda x + 2x - 2\lambda^2 y - \lambda y - y + \lambda - 1 &= 0 \Leftrightarrow \\ (3x - 2y) \cdot \lambda^2 + (x - y + 1) \cdot \lambda + (2x - y - 1) &= 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Για να αληθεύει η (1), για κάθε τιμή της παραμέτρου λ ,

$$\text{πρέπει: } \begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ x - y + 1 = 0 \\ 2x - y - 1 = 0 \end{cases}$$

Με αφαίρεση κατά μέλη των δύο τελευταίων εξισώσεων προκύπτει: $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

$$\text{Τότε: } \begin{cases} 3 \cdot 2 - 2y = 0 \\ 2 - y + 1 = 0 \\ 2 \cdot 2 - y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = 3.$$

Επομένως η ε διέρχεται από το σταθερό σημείο (2,3).

2^{ος} τρόπος

Για $\lambda = 0$ η ε γίνεται: $2x - y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = 2x - 1$ και για $\lambda = 1$

η ε γίνεται: $6x - 4y = 0 \Leftrightarrow 6x - 4(2x - 1) = 0 \Leftrightarrow 6x - 8x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Τότε: $y = 2 \cdot 2 - 1 = 3$.

Δηλαδή, δύο από τις αρχικές ευθείες διέρχονται από το σημείο A(2,3).

Για να διέρχονται όλες από το A πρέπει:

$$\begin{aligned} (3\lambda^2 + \lambda + 2)x - (2\lambda^2 + \lambda + 1)y + \lambda - 1 &= 0 \Leftrightarrow \\ 6\lambda^2 + 2\lambda + 4 - 6\lambda^2 - 3\lambda - 3 + \lambda - 1 &= 0 \Leftrightarrow 3\lambda - 3\lambda + 4 - 4 = 0 \text{ που ισχύει.} \end{aligned}$$

Επομένως, το σταθερό σημείο είναι το A.

Β) Έστω ότι τα σημεία Α και Β έχουν συντεταγμένες $(\alpha, 0)$ και $(0, \beta)$

αντίστοιχα, με $\alpha, \beta > 0$. Τότε: $\frac{1}{(OA)} + \frac{1}{(OB)} = 4 \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 4 \Leftrightarrow \frac{1}{\beta} = 4 - \frac{1}{\alpha}$ (1)

Επειδή $\beta > 0$, πρέπει και $4 - \frac{1}{\alpha} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} < 4 \Leftrightarrow \alpha > \frac{1}{4}$.

Τότε η (1) γίνεται: $\frac{1}{\beta} = \frac{4\alpha - 1}{\alpha} \Leftrightarrow \beta = \frac{\alpha}{4\alpha - 1}$. Δηλαδή, το Β έχει συντεταγμένες $\left(0, \frac{\alpha}{4\alpha - 1}\right)$.

Για τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας ΑΒ ισχύει: $\lambda = \frac{\frac{\alpha}{4\alpha - 1} - 0}{0 - \alpha} = \frac{1}{1 - 4\alpha}$

Η ευθεία ΑΒ έχει εξίσωση:

$$y - 0 = \frac{1}{1 - 4\alpha} \cdot (x - \alpha) \Leftrightarrow (1 - 4\alpha)y = x - \alpha \Leftrightarrow x + (4\alpha - 1)y - \alpha = 0 \quad (2)$$

Για $\alpha = 1$ η (2) γίνεται $x + 3y - 1 = 0$ και για $\alpha = 2$ η (2) γίνεται: $x + 7y - 2 = 0$.

Με αφαίρεση κατά μέλη προκύπτει: $4y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{4}$ και

$$x + 3 \cdot \frac{1}{4} - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}.$$

Δηλαδή δύο από τις ευθείες της (2) διέρχονται από το σταθερό σημείο

$$M\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right).$$

Για να διέρχονται όλες από το Μ, δηλαδή για να διέρχονται από την ευθεία

ΑΒ από το σταθερό σημείο Μ, πρέπει $\frac{1}{4}(4\alpha - 1) \cdot \frac{1}{4} - \alpha = 0 \Leftrightarrow 1 + 4\alpha - 1 - 4\alpha = 0$

που ισχύει.

Επομένως, η ευθεία ΑΒ διέρχεται από το σταθερό σημείο $M\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$.

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ
ΠΕΤΡΟΠΟΥΛΟΣ ΙΩΑΝΝΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

