

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1^ο

A) Δίνεται ο κύκλος $C : x^2 + y^2 = R^2$ και το σημείο του $A(x_1, y_1)$. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη του C στο A έχει εξίσωση $xx_1 + yy_1 = R^2$.

(15 μονάδες)

B) Να δώσετε τον ορισμό της έλλειψης.

(5 μονάδες)

Γ) Να γράψετε την ανακλαστική ιδιότητα της υπερβολής.

(5 μονάδες)

ΘΕΜΑ 2^ο

A) Δίνεται η υπερβολή $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$. Να αποδείξετε ότι $\frac{\beta}{\alpha} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}$.

(10 μονάδες)

B) Δίνεται η υπερβολή $c : \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ με εκκεντρότητα $\varepsilon = 2$. Να βρεθεί η γωνία των ασύμπτωτων της c .

(15 μονάδες)

ΘΕΜΑ 3^ο

A) Να δείξετε ότι η ευθεία $\lambda x + \mu y + \sqrt{\lambda^2 \alpha^2 + \mu^2 \beta^2} = 0$ εφάπτεται της έλλειψης

$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ με $|\lambda| + |\mu| \neq 0$.

(10 μονάδες)

B) Έστω η παραβολή $C : y^2 = 2px, p > 0$. Να βρεθεί το p αν η παραβολή διέρχεται από το $A(2, -\sqrt{2})$. Να βρεθεί η απόσταση της εστίας από την εφαπτομένη της παραβολής στο A .

(15 μονάδες)

ΘΕΜΑ 4^ο

A) Να σχεδιάσετε την καμπύλη με εξίσωση: $\frac{x|x|}{9} + \frac{y|y|}{4} = 1$.

(10 μονάδες)

Β) Από το $M(-3, -8)$ φέρνουμε τις εφαπτόμενες στον κύκλο

$C: x^2 + y^2 + 8x + 2y - 8 = 0$ και έστω τα Α, Β τα σημεία επαφής.

- i. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων αυτών.
(5 μονάδες)
- ii. Να υπολογίσετε το μήκος των ΜΑ, ΜΒ.
(5 μονάδες)
- iii. Αν Κ είναι το κέντρο του c να αποδείξετε ότι η ΜΚ είναι μεσοκάθετη του ΑΒ.
(5 μονάδες)

ΟΙ ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ ΚΑΘΩΣ ΚΑΙ ΟΙ ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ ΘΑ
ΒΡΙΣΚΟΝΤΑΙ ΣΤΗΝ ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΤΟΥ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟΥ ΜΑΣ
www.apolito.gr

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΘΕΜΑΤΩΝ
ΜΠΑΤΖΑΚΑΣ ΜΙΧΑΛΗΣ
ΠΕΤΡΟΠΟΥΛΟΣ ΙΩΑΝΝΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

Θεωρία σχολικού.

ΘΕΜΑ 2^ο

A) Θεωρία σχολικού.

$$B) \varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} \Leftrightarrow 2 = \frac{\gamma}{\alpha} \Leftrightarrow \gamma = 2\alpha.$$

$$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 \Leftrightarrow 4\alpha^2 = \alpha^2 + \beta^2 \Leftrightarrow \beta^2 = 3\alpha^2 \Leftrightarrow \frac{\beta}{\alpha} = \sqrt{3}.$$

Άρα $\varepsilon\phi\omega = \sqrt{3}$ άρα η μια γωνία των ασύμπτωτων είναι 60° και η άλλη 120° .

ΘΕΜΑ 3^ο

A) Η εξίσωση της ευθείας γράφεται:

$$y = \frac{-\sqrt{\lambda^2 \alpha^2 + \mu^2 \beta^2} - \lambda x}{\mu} \quad \mu \neq 0 \quad \text{οπότε η έλλειψη } \beta^2 x^2 + \alpha^2 y^2 = \alpha^2 \beta^2 \text{ δίνει:}$$

$$\beta^2 x^2 + \alpha^2 \cdot \frac{\left(-\sqrt{\lambda^2 \alpha^2 + \mu^2 \beta^2} - \lambda x\right)^2}{\mu^2} = \alpha^2 \beta^2 \quad \text{δηλαδή}$$

$$\mu^2 \beta^2 x^2 + \alpha^2 \left(-\sqrt{\lambda^2 \alpha^2 + \mu^2 \beta^2} - \lambda x\right)^2 = \mu^2 \alpha^2 \beta^2$$

$$\mu^2 \beta^2 x^2 + \alpha^2 \left(\lambda^2 \alpha^2 + \mu^2 \beta^2 + \lambda^2 x^2 + 2\sqrt{\lambda^2 \alpha^2 + \mu^2 \beta^2} \lambda x\right) = \mu^2 \alpha^2 \beta^2$$

$$\mu^2 \beta^2 x^2 + \alpha^4 \lambda^2 + \alpha^2 \mu^2 \beta^2 + \alpha^2 \lambda^2 x^2 + 2\sqrt{\lambda^2 \alpha^2 + \mu^2 \beta^2} \lambda \alpha^2 x - \mu^2 \alpha^2 \beta^2 = 0$$

$$\left(\mu^2 \beta^2 + \alpha^2 \lambda^2\right) x^2 + 2\lambda \alpha^2 \sqrt{\lambda^2 \alpha^2 + \mu^2 \beta^2} x + \alpha^4 \lambda^2 = 0$$

$$\left(\sqrt{\mu^2 \beta^2 + \alpha^2 \lambda^2} x + \alpha^2 \lambda\right)^2 = 0$$

Η τελευταία εξίσωση έχει μια ρίζα διπλή συνεπώς η ευθεία και η έλλειψη έχουν ένα μόνο κοινό σημείο οπότε και εφάπτονται.

Β) Εφόσον η παραβολή διέρχεται από το Α οι συντεταγμένες του Α την επαληθεύουν.

$$\text{Συνεπώς } (-\sqrt{2})^2 = 2p \Leftrightarrow 2 = 4p \Leftrightarrow p = \frac{1}{2}$$

Η εφαπτομένη της παραβολής στο Α είναι:

$$y \cdot (-\sqrt{2}) = \frac{1}{2}(x+2) \Leftrightarrow -\sqrt{2}y = \frac{1}{2}x + 1 \Leftrightarrow -2\sqrt{2}y = x + 2 \Leftrightarrow x + 2\sqrt{2}y + 2 = 0$$

$$E\left(\frac{p}{2}, 0\right) \text{ άρα } E\left(\frac{1}{4}, 0\right). \text{ Άρα } d(\varepsilon, \varepsilon\varphi) = \frac{\left|\frac{1}{4} + 2\sqrt{2} \cdot 0 + 2\right|}{\sqrt{1^2 + (2\sqrt{2})^2}} = \frac{\frac{9}{4}}{3} = \frac{3}{4} \text{ μονάδες}$$

ΘΕΜΑ 4^ο

Α) Διακρίνουμε τέσσερις περιπτώσεις:

- Αν $x \geq 0$ και $y \geq 0$, τότε η εξίσωση γράφεται:

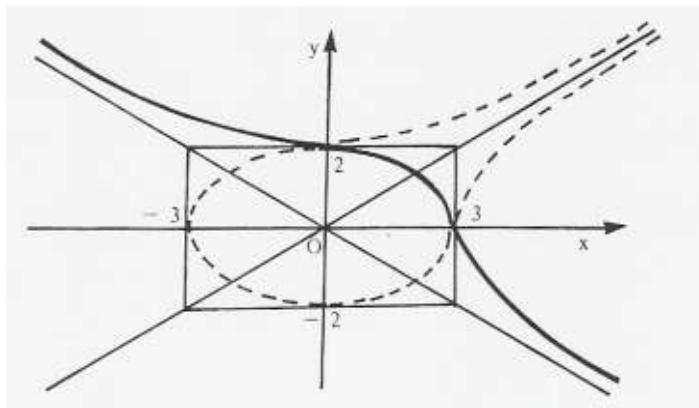
$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$$

και παριστάνει το τμήμα της έλλειψης με κορυφές Α(3,0) και Α'(-3,0) και εστίες Ε(√5,0) και Ε'(-√5,0), το οποίο βρίσκεται στο 1^ο τεταρτημόριο.

- Αν $x \leq 0$ και $y \geq 0$, τότε η εξίσωση γράφεται:

$$-\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{y^2}{2^2} - \frac{x^2}{3^2} = 1$$

και παριστάνει το τμήμα της υπερβολής με κορυφές Α(0,2) και Α'(0,-2) και εστίες Ε(0,√13) και Ε'(0,-√13), το οποίο βρίσκεται στο 2^ο τεταρτημόριο.



- Αν $x \leq 0$ και $y \leq 0$, τότε η εξίσωση γράφεται:

$$-\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = -1$$

που είναι αδύνατη.

- Αν $x \geq 0$ και $y \leq 0$, τότε η εξίσωση γράφεται:

$$\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1$$

και παριστάνει το τμήμα της υπερβολής με κορυφές $A(3,0)$ και $A'(-3,0)$ και εστίες $E(\sqrt{13},0)$, και $E'(-\sqrt{13},0)$, το οποίο βρίσκεται στο 4^ο τεταρτημόριο.

B) i) Είναι $x^2 + y^2 + 8x + 2y - 8 = 0 \Leftrightarrow (x+4)^2 + (y+1)^2 = 5^2$

Αν $M_1(x_1, y_1)$ είναι τι σημείο επαφής, η εξίσωση της εφαπτομένης θα είναι:

$$(x+4) \cdot (x_1+4) + (y+1) \cdot (y_1+1) = 25$$

και επαληθεύεται από τις συντεταγμένες του $M(-3, -8)$, οπότε θα έχουμε την ανισότητα:

$$(-3+4) \cdot (x_1+4) + (-8+1) \cdot (y_1+1) = 25$$

$$\text{ή} \quad x_1 = 7y_1 + 28 \quad (1)$$

Επειδή το $M_1(x_1, y_1)$ ανήκει στον κύκλο C θα ισχύει

$$x_1^2 + y_1^2 + 8x_1 + 2y_1 - 8 = 0 \text{ οπότε λόγω της (1) έχουμε:}$$

$$(28 + 7y_1)^2 + y_1^2 + 8 \cdot (28 + 7y_1) + 2y_1 - 8 = 0$$

$$\text{ή} \quad y_1^2 + 9y_1 + 20 = 0,$$

από όπου βρίσκουμε $y_1 = -4$ ή $y_1 = -5$

και αντίστοιχα $x_1 = 0$ ή $x_1 = -7$

Άρα οι εξισώσεις των εφαπτόμενων είναι:

$$\varepsilon_1 : (x+4) \cdot (0+4) + (y+1) \cdot (-4+1) = 25$$

$$\varepsilon_2 : (x+4) \cdot (-7+4) + (y+1) \cdot (-5+1) = 25$$

οι οποίες μετά την εκτέλεση των πράξεων γράφονται

$$\varepsilon_1 : 4x - 3y = 12$$

$$\varepsilon_2 : 3x + 4y = -41$$

ii) Είναι $(MA) = \sqrt{9+16} = 5$ και $(MB) = \sqrt{16+9} = 5 = (MA)$.

iii) Είναι $\lambda_{MK} = \frac{7}{-1} = -7$, $\lambda_{AB} = \frac{-1}{-7} = \frac{1}{7}$, οπότε

$$\lambda_{MK} \cdot \lambda_{AB} = -7 \cdot \frac{1}{7} = -1. \text{ Άρα } MK \perp AB$$

και επειδή το τρίγωνο MAB είναι ισοσκελές ($MA = MB$), η MK θα είναι και διάμεσος του τριγώνου. Δηλαδή η MK είναι μεσοκάθετος του AB.

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ
ΜΠΑΤΖΑΚΑΣ ΜΙΧΑΛΗΣ
ΠΕΤΡΟΠΟΥΛΟΣ ΙΩΑΝΝΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ