

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ
19/2/2012

ΘΕΜΑ 1^ο

- I. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη του κύκλου $C: x^2 + y^2 = \rho^2$ σε ένα σημείο του $A(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση $xx_1 + yy_1 = \rho^2$

10 μονάδες

- II. Να δώσετε τον ορισμό της έλλειψης με εστίες τα σημεία E, E'

5 μονάδες

- III. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστές (Σ) ή Λάθος (Λ)

- i. Η παραβολή $y^2 = \rho x$ έχει εστία $E\left(\frac{\rho}{4}, 0\right)$
- ii. Η εκκεντρότητα μιας έλλειψης είναι αριθμός πραγματικός μεγαλύτερος του 1
- iii. Η εφαπτομένη της παραβολής $x^2 = 24y$ στο σημείο της $M(x_1, y_1)$ είναι η $xx_1 = 12(x + x_1)$
- iv. Ο κύκλος $x^2 + y^2 = 21$ διέρχεται από το $O(0, 0)$
- v. Κάθε εξίσωση της μορφής $x^2 + y^2 + x + y - \lambda^2 = 0$ παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

10 μονάδες

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ και η παραβολή $y^2 = 16x$.

- i. Να βρείτε τις εστίες της έλλειψης και την εστία της παραβολής

8 μονάδες

- ii. Έστω E', E οι εστίες της έλλειψης (η E' να έχει αρνητική τετμημένη)

α. Να γράψετε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων της παραβολής στα σημεία της $M(4, 8)$ και $M'(4, -8)$ και να δείξετε ότι τέμνονται στο E'

7 μονάδες

β. Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{E'M} \cdot \overrightarrow{E'M'} = 0$

5 μονάδες

γ. Αν N είναι το μέσο του $E'M$ να αποδείξετε ότι $EN \parallel E'M'$

5 μονάδες

ΘΕΜΑ 3^ο

Έστω τα σημεία $A(-1, y)$ και $B(2x, y)$ με $x, y \in \mathbb{R}$ του καρτεσιανού επιπέδου Oxy

- i. Αν είναι $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$, τότε να αποδείξετε ότι τα σημεία $M(x, y)$ ανήκουν στην παραβολή $C_1: y^2 = 2x$, της οποίας να βρείτε την εστία E και τη διευθετούσα δ .

6 μονάδες

- ii. Αν ισχύει $3\overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OB}^2 = 15$, τότε να αποδείξετε ότι τα σημεία $M(x, y)$ ανήκουν στον κύκλο $C_2: x^2 + y^2 = 3$, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα

8 μονάδες

- iii. Να αποδείξετε ότι:

α. Τα κοινά σημεία των C_1 και C_2 είναι το $K(1, \sqrt{2})$ και το $\Lambda(1, -\sqrt{2})$

7 μονάδες

β. Η εφαπτομένη της C_1 στο K είναι παράλληλη προς την εφαπτομένη του C_2 στο Λ

4 μονάδες

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 + y^2 - (\lambda + 4)x + \lambda y + 2\lambda = 0$ (1), όπου $\lambda \in \mathbb{R}$

- i. Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή της παραμέτρου λ η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο, του οποίου να βρείτε το κέντρο K και την ακτίνα ρ .

μονάδες 8

- ii. Να δείξετε ότι το κέντρο K του κύκλου που παριστάνει η εξίσωση (1), κινείται σε μια ευθεία γραμμή, καθώς το λ μεταβάλλεται στο $\mathbb{R}$

μονάδες 4

- iii. Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης C , που έχει εστίες τα σημεία $E'(0, -2\sqrt{3})$, $E(0, 2\sqrt{3})$ και μεγάλο άξονα $(A'A) = 8$

μονάδες 5

- iv. Αν η εφαπτομένη ε της έλλειψης C του ερωτήματος iii, στο σημείο της $M_1(x_1, y_1)$ εφάπτεται και του κύκλου C_1 , ο οποίος προκύπτει από την εξίσωση (1) για $\lambda = 0$, να δείξετε ότι:

α. $y_1^2 = 64(1 - x_1)$

μονάδες 4

β. Τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (x_1, 4)$ και $\vec{\beta} = (x_1, 3 - 4x_1)$ είναι μεταξύ τους κάθετα

μονάδες 4

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

- I. Θεωρία σχολικού βιβλίου
 II. Θεωρία σχολικού βιβλίου
 III. i. Σ, ii. Λ, iii. Σ, iv. Λ, v. Σ

ΘΕΜΑ 2^ο

- i. Η έλλειψη έχει $\alpha = 5$, $\beta = 3$, $\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 = 4^2$ άρα
 $\gamma = 4$ οπότε είναι $E'(-4, 0)$, $E(4, 0)$

Η παραβολή έχει παράμετρο $p = 8$ και εστία $\left(\frac{p}{2}, 0\right) = (4, 0)$

- ii. α. Από τον τύπο $yy_1 = p(x + x_1)$ βρίσκουμε:

Για το $M(4, 8)$: $8y = 8(x + 4) \Leftrightarrow y = x + 4$

Για το $M(4, -8)$: $-8y = 8(x + 4) \Leftrightarrow y = -x - 4$

β. Είναι: $\overrightarrow{E'M} = (4 + 4, 8 - 0) = (8, 8)$

[τύπος: $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$]

και $\overrightarrow{E'M'} = (4 + 4, -8 - 0) = (8, -8)$

οπότε: $\overrightarrow{E'M} \cdot \overrightarrow{E'M'} = 64 - 64 = 0$

[τύπος: $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$]

γ. Είναι: $N\left(\frac{-4+4}{2}, \frac{8+0}{2}\right)$ δηλαδή $N(0, 4)$

[Συντεταγμένες μέσου]

και $\lambda_{EN} = \frac{4-0}{0-4} = -1$

[τύπος: $\lambda_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, $x_1 \neq x_2$]

$\lambda_{E'M'} = \frac{-8-0}{4+4} = -1$

Έτσι $\lambda_{EN} = \lambda_{E'M'} \Leftrightarrow EN \parallel E'M'$

ΘΕΜΑ 3^ο

Για $A(-1, y)$ και $B(2x, y)$ με $O(0, 0)$ έχουμε $\overrightarrow{OA} = (-1, y)$ και $\overrightarrow{OB} = (2x, y)$
 οπότε:

- i. Αφού $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$, τότε $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow -1 \cdot 2x + y \cdot y = 0 \Leftrightarrow y^2 = 2x$ που είναι
 εξίσωση παραβολής C_1 με $2\rho = 2 \Leftrightarrow \rho = 1$, συνεπώς η εστία είναι το σημείο
 $E\left(\frac{\rho}{2}, 0\right)$ ή $E\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ και διευθετούσα δ είναι η ευθεία με εξίσωση $x = -\frac{\rho}{2}$ ή
 $x = -\frac{1}{2}$

- ii. Έχουμε $\overline{OB}^2 + 3\overline{OA}^2 = 15 \Leftrightarrow |\overline{OB}|^2 + 3|\overline{OA}|^2 = 15 \Leftrightarrow$
 $\sqrt{(2x)^2 + y^2}^2 + 3\sqrt{(-1)^2 + y^2}^2 = 15 \Leftrightarrow 4x^2 + y^2 + 3(1 + y^2) = 15$, άρα
 $4x^2 + y^2 + 3 + 3y^2 = 15 \Leftrightarrow 4x^2 + 4y^2 = 12 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 3$ που είναι εξίσωση
 κύκλου C_2 , με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $R = \sqrt{3}$
- iii. α. Για τα κοινά σημεία των C_1, C_2 λύνουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} y^2 = 2x \\ x^2 + y^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 2x \\ x^2 + 2x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y^2 = 2 \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} x = -3 \\ y^2 = -6 \end{cases}$$

 που είναι αδύνατο, επομένως έχουμε: $\begin{cases} x = 1 \\ y = \sqrt{2} \text{ ή } y = -\sqrt{2} \end{cases}$.
 Άρα τα κοινά σημεία των C_1, C_2 είναι το $K(1, \sqrt{2})$ και το $\Lambda(1, -\sqrt{2})$
- β. Η εφαπτομένη της C_1 στο $K(1, \sqrt{2})$ έχει εξίσωση:
 $yy_1 = \rho(x + x_1)$ ή $y\sqrt{2} = 1(x + 1) \Leftrightarrow \sqrt{2}y = x + 1 \Leftrightarrow y = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}$ (1)
 Η εφαπτομένη του C_2 στο $\Lambda(1, -\sqrt{2})$ έχει εξίσωση:
 $xx_2 + yy_2 = 3$ ή $x + y(-\sqrt{2}) = 3 \Leftrightarrow \sqrt{2}y = x - 3 \Leftrightarrow y = \frac{\sqrt{2}}{2}x - 3\frac{\sqrt{2}}{2}$ (2)
 Οι ευθείες που παριστάνουν οι (1), (2) έχουν ίσους συντελεστές διεύθυνσης
 $(\lambda = \frac{\sqrt{2}}{2})$, άρα οι εφαπτομένες είναι παράλληλες.

ΘΕΜΑ 4^ο

- i. Στην εξίσωση $x^2 + y^2 - (\lambda + 4)x + \lambda y + 2\lambda = 0$ έχουμε:
 $A = -(\lambda + 4)$, $B = \lambda$, $\Gamma = 2\lambda$, οπότε:
 $A^2 + B^2 - 4\Gamma = (\lambda + 4)^2 + \lambda^2 - 8\lambda = 2(\lambda^2 + 8) > 0$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και επομένως η
 εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο για κάθε τιμή της παραμέτρου λ . Για το κέντρο K και
 την ακτίνα R του κύκλου ισχύουν:
 $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ και $R = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2}$, επομένως $K\left(\frac{\lambda+4}{2}, -\frac{\lambda}{2}\right)$ και $R = \frac{\sqrt{2(\lambda^2+8)}}{2}$
- ii. Έστω $K(x, y)$ το κέντρο του κύκλου (1), τότε (από i ερώτημα):
 $x = \frac{\lambda+4}{2}$ και $y = -\frac{\lambda}{2}$
 Έχουμε λοιπόν το σύστημα $\begin{cases} x = \frac{\lambda+4}{2} \\ y = -\frac{\lambda}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \lambda + 4 \\ 2y = -\lambda \end{cases}$
 Απαλείφουμε το λ από τις εξισώσεις και βρίσκουμε $2x + 2y - 4 = 0$ ή ισοδύναμα
 $x + y - 2 = 0$
 Άρα το κέντρο K του κύκλου (1) κινείται στην ευθεία $x + y - 2 = 0$
- iii. Έχουμε $2\alpha = 8 \Leftrightarrow \alpha = 4$ και $\gamma = 2\sqrt{3}$. Ισχύει $\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2$, οπότε
 $\beta^2 = 4^2 - (2\sqrt{3})^2 \Leftrightarrow \beta^2 = 16 - 12 \Leftrightarrow \beta^2 = 4$.

Επομένως η εξίσωση της έλλειψης C είναι: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$, εφόσον οι εστίες της E', E βρίσκονται στον άξονα $y'y$.

iv. Η εξίσωση (1) της υπόθεσης για $\lambda = 0$ γίνεται $x^2 + y^2 - 4x = 0$ που είναι η εξίσωση του κύκλου C_1 με κέντρο το σημείο $K_1(2, 0)$ και ακτίνα $\rho_1 = 2$.

Η ε εφαπτομένης της έλλειψης C στο σημείο της $M_1(x_1, y_1)$ είναι:

$$\frac{xx_1}{4} + \frac{yy_1}{16} = 1 \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad 4xx_1 + yy_1 - 16 = 0$$

Η ε εφάπτεται και του κύκλου C_1 , άρα ισχύει: $d(K_1, \varepsilon) = \rho_1$, (2)

α. Από τη σχέση (2) έχουμε ισοδύναμα $\frac{|4 \cdot 2 \cdot x_1 + 0 \cdot y_1 - 16|}{\sqrt{(4x_1)^2 + y_1^2}} = 2 \Leftrightarrow$

$$8|x_1 - 2| = 2\sqrt{16x_1^2 + y_1^2} \Leftrightarrow 16(x_1 - 2)^2 = 16x_1^2 + y_1^2 \Leftrightarrow$$

$$16x_1^2 - 64x_1 + 64 = 16x_1^2 + y_1^2 \Leftrightarrow y_1^2 = 64(1 - x_1).$$

β. Το σημείο $M_1(x_1, y_1)$ ανήκει στην έλλειψη C : $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$, άρα

$$\frac{x_1^2}{4} + \frac{y_1^2}{16} = 1 \Leftrightarrow 4x_1^2 + y_1^2 = 16 \Leftrightarrow y_1^2 = 16 - 4x_1^2 \quad (3)$$

Έτσι η σχέση $y_1^2 = 64(1 - x_1)$ λόγω της (3), γράφεται:

$$16 - 4x_1^2 = 64(1 - x_1) \Leftrightarrow 4x_1^2 - 64x_1 + 48 = 0 \Leftrightarrow x_1^2 - 16x_1 + 12 = 0 \quad (4)$$

Τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (x_1, 4)$ και $\vec{\beta} = (x_1, 3 - 4x_1)$ είναι μεταξύ τους κάθετα, όταν:

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0 \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad x_1 \cdot x_1 + 4 \cdot (3 - 4x_1) = 0 \Leftrightarrow x_1^2 - 16x_1 + 12 = 0,$$

που ισχύει λόγω της (4).