

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΘΕΤΙΚΗΣ- ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

- I. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$, $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$
Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = x_1x_2 + y_1y_2$
10 μονάδες
- II. Να δώσετε τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$
5 μονάδες
- III. Να χαρακτηρίσετε ως σωστές (Σ) ή λάθος (Λ) τις παρακάτω προτάσεις
1. Τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB})$ είναι αντίθετα
 2. Το εμβαδόν του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$ στο οποίο $A(-2, 4)$ και $\Gamma(2, 2)$ είναι ίσο με 20
 3. Αν $|\vec{\alpha}| = 1$, $|\vec{\beta}| = 4$ και $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{\pi}{3}$ τότε $(2\alpha - 3\beta)^2 = 124$
 4. Οι ευθείες $x = 5$ και $y = 5$ είναι κάθετες
 5. Το τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές $A(4, 3)$, $B(0, 1)$ και $\Gamma(-2, 5)$ είναι ορθογώνιο στο B
- 10 μονάδες

ΘΕΜΑ 2^ο

- I. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που τέμνει τους άξονες στα σημεία $A(-\frac{1}{\alpha}, 0)$ και $B(0, -\frac{1}{\beta})$ με $\alpha, \beta \neq 0$
10 μονάδες
- II. Να δείξετε ότι τα σημεία $A(-2, 1)$, $B(2, 2)$ και $\Gamma(6, 3)$ είναι συνευθειακά
5 μονάδες
- III. Να βρεθούν οι εξισώσεις:
1. Της ευθείας ε_1 που είναι κάθετη στην ευθεία $\varepsilon: y = -2x + 2$ και διέρχεται από το σημείο $A(-1, 4)$
 2. Της ευθείας ε_2 που διέρχεται από τα σημεία $B(3, 3)$ και $\Gamma(1, 5)$
 3. Της ευθείας ε_3 που διέρχεται από το σημείο $\Delta(2, \frac{1}{2})$ και σχηματίζει γωνία 45° με τον άξονα $x'x$
- 10 μονάδες

ΘΕΜΑ 3^ο

- I. Δίνονται οι κορυφές του τριγώνου $AB\Gamma$ $A(3, 1)$, $B(4, 4)$ και $\Gamma(6, 0)$
1. Να δείξετε ότι η $B\hat{A}\Gamma$ είναι ορθή
 2. Να βρεθούν οι εξισώσεις των πλευρών του τριγώνου
- 8 μονάδες
- II. Δίνονται τα σημεία $A(2, 3)$ $B(6, 6)$ $\Gamma(7, 1)$ και $\Delta(3, -2)$
1. Να δείξετε ότι το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο
 2. Να βρεθούν οι εξισώσεις των διαγωνίων του
- 8 μονάδες
- III. Δίνονται τα σημεία $A(1, 3)$ $B(4, 7)$ $\Delta(-2, 2)$ ενός παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$. Να βρεθούν οι εξισώσεις όλων των πλευρών του, καθώς και οι συντεταγμένες της κορυφής Γ .
- 9 μονάδες

ΘΕΜΑ 4^ο

- I. 1. Να δείξετε ότι $\text{προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{\beta} = \frac{\vec{\alpha}\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|^2} \vec{\alpha}$
2. Αν $4|\vec{\alpha}| = 3|\vec{\beta}| = 12$, $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = 5$ να δείξετε ότι $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$
- 10 μονάδες
- II. Αν $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = |\vec{\gamma}| = 2$ και $\vec{\alpha}\vec{\beta} + \vec{\beta}\vec{\gamma} = 8$, να δείξετε ότι $\vec{\alpha} = \vec{\beta} = \vec{\gamma}$
- 5 μονάδες
- III. Δίνεται τρίγωνο με κορυφές $A(2, 3)$, $B(1, 1)$ και $\Gamma(3, 4)$. Να υπολογίσετε το μήκος του ύψους AD .
- 5 μονάδες
- IV. Αν $\vec{\alpha} \neq \pm\vec{\beta}$ να δείξετε ότι: $\frac{|\vec{\alpha}|}{|\vec{\alpha} + \vec{\beta}|} + \frac{|\vec{\beta}|}{|\vec{\alpha} - \vec{\beta}|} \geq 1$
- 5 μονάδες

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1°

I, II : ΘΕΩΡΙΑ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

III.: 1.Σ, 2.Λ, 3.Σ, 4.Σ, 5.Σ

ΘΕΜΑ 2°

I. Η ζητούμενη ευθεία έχει συντελεστή διεύθυνσης: $\lambda = \frac{-\frac{1}{\beta}}{0+\frac{1}{\alpha}} = \frac{-\alpha}{\beta}$

Η εξίσωση της ευθείας είναι της μορφής $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$. Αντικαθιστούμε τις συντεταγμένες του σημείου A οπότε έχουμε:

$$y - 0 = -\frac{\alpha}{\beta}\left(x + \frac{1}{\alpha}\right) \Leftrightarrow \boxed{y = -\frac{\alpha}{\beta}x - \frac{1}{\beta}}$$

II. Για να δείξουμε ότι τα τρία αυτά σημεία είναι συνευθειακά, αρκεί να βρούμε την εξίσωση που διέρχεται από τα A και B και στη συνέχεια να δείξουμε ότι το σημείο Γ ανήκει στην ευθεία AB .

Η ευθεία που διέρχεται από τα A και B έχει συντελεστή διεύθυνσης:

$$\lambda_{AB} = \frac{2-1}{2+2} = \frac{1}{4}$$

Η εξίσωση της ευθείας είναι της μορφής $y - y_0 = \lambda_{AB}(x - x_0)$. Αντικαθιστούμε τις συντεταγμένες του σημείου A στην παραπάνω εξίσωση οπότε έχουμε:

$$y - 1 = \frac{1}{4}(x + 2) \Leftrightarrow y = \frac{1}{4}x + \frac{2}{4} + 1 \Leftrightarrow \boxed{y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}}$$

Αντικαθιστούμε τις ευθείες του σημείου Γ , για να ελέγξουμε αν ανήκει στην ευθεία.

Πράγματι: $3 = \frac{1}{4} \cdot 6 + \frac{3}{2} \Leftrightarrow 3 = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \Leftrightarrow 3 = 3$ αληθές

Επομένως τα A, B, Γ είναι συνευθειακά και ανήκουν στην $\varepsilon: y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$

Πιο απλά: Επειδή $\lambda_{AB} = \frac{1}{4}$ και $\lambda_{B\Gamma} = \frac{1}{4}$ άρα A, B, Γ συνευθειακά.

III. 1. Η ε_1 είναι κάθετη στην ευθεία $\varepsilon: y = -2x + 2$ και άρα ισχύει:

$\lambda_1 \cdot \lambda_\varepsilon = -1 \Leftrightarrow \lambda_1(-2) = -1 \Leftrightarrow \lambda_1 = \frac{1}{2}$, όπου $\lambda_1, \lambda_\varepsilon$ οι συντελεστές διεύθυνσης της ε_1 και ε αντίστοιχα.

Συνεπώς η ε_1 είναι της μορφής $y = \frac{1}{2}x + \beta_1$.

Η εξίσωση της ε_1 επαληθεύεται από τις συντεταγμένες του σημείου $A(-1,4)$ το οποίο ανήκει σ' αυτήν οπότε: $4 = \frac{1}{2}(-1) + \beta_1 = 4 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$

Επομένως: $\boxed{\varepsilon_1 = y = \frac{1}{2}x + \frac{9}{2}}$

2. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ε_2 που διέρχεται από τα σημεία $B(3,3)$ και $\Gamma(1,5)$

είναι: $\lambda_2 = \frac{5-3}{1-3} = \frac{2}{-2} = -1$

Επομένως η εξίσωση της ε_2 είναι της μορφής $y - y_0 = \lambda_2(x - x_0)$ οπότε αντικαθιστώντας τις συντεταγμένες του B έχουμε:

$$y - 3 = -1(x - 3) \Leftrightarrow y - 3 = 3 - x \Leftrightarrow \boxed{y = -x + 6}$$

3. Η ε_3 σχηματίζει γωνία 45° με τον άξονα $x'x$ οπότε ο συντελεστής διεύθυνσής της είναι: $\lambda_3 = \varepsilon\phi 45^\circ = 1$

Η ε_3 είναι της μορφής $y = \lambda_3 x + \beta_3 \Leftrightarrow y = x + \beta_3$

Η ε_3 διέρχεται από το σημείο $\Delta(2, \frac{1}{2})$, συνεπώς οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της οπότε: $\frac{1}{2} = 2 + \beta_3 = \frac{1}{2} - 2 \Leftrightarrow \beta_3 = -\frac{3}{2}$

Άρα $\varepsilon_3: y = x - \frac{3}{2}$

ΘΕΜΑ 3°

I. 1. Για να δείξουμε ότι η $B\hat{A}\Gamma$ είναι ορθή, αρκεί να δείξουμε ότι $AB \perp A\Gamma$, δηλαδή ότι $\lambda_{AB} \cdot \lambda_{A\Gamma} = -1$

Υπολογίζουμε τους συντελεστές διεύθυνσης των $AB, A\Gamma$. Είναι:

$$\lambda_{AB} = \frac{4-1}{4-3} = 3 \quad \lambda_{A\Gamma} = \frac{0-1}{6-3} = -\frac{1}{3} \quad \text{Οπότε: } \lambda_{AB} \cdot \lambda_{A\Gamma} = 3 \left(-\frac{1}{3}\right) = -1$$

2. Η εξίσωση της AB είναι της μορφής:

$$y - y_0 = \lambda_{AB}(x - x_0) \Leftrightarrow y - 1 = 3(x - 3) \Leftrightarrow y - 1 = 3x - 9 \Leftrightarrow \boxed{y = 3x - 8}$$

Η εξίσωση της $A\Gamma$ είναι της μορφής:

$$y - y_0 = \lambda_{A\Gamma}(x - x_0) \Leftrightarrow y - 0 = -\frac{1}{3}(x - 6) \Leftrightarrow \boxed{y = -\frac{1}{3}x + 2}$$

Υπολογίζουμε τον συντελεστή διεύθυνσης της $B\Gamma$. Είναι: $\lambda_{B\Gamma} = \frac{0-4}{6-4} = \frac{-4}{2} = -2$

Η $B\Gamma$ είναι της μορφής $y - y_0 = \lambda_{B\Gamma}(x - x_0)$ οπότε αντικαθιστώντας τις συντεταγμένες του σημείου Γ έχουμε: $y - 0 = -2(x - 6) \Leftrightarrow \boxed{y = -2x + 12}$

II. 1. Για να δείξουμε ότι το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο, αρκεί να δείξουμε ότι $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $A\Delta \parallel B\Gamma$. Υπολογίζουμε τους συντελεστές διεύθυνσης των πλευρών του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$.

$$\lambda_{AB} = \frac{6-3}{6-2} = \frac{3}{4}, \quad \lambda_{\Gamma\Delta} = \frac{1+2}{7-3} = \frac{3}{4} \quad \text{δηλαδή } \lambda_{AB} = \lambda_{\Gamma\Delta} \quad \text{οπότε } AB \parallel \Gamma\Delta$$

$$\lambda_{A\Delta} = \frac{-2-3}{3-2} = -5, \quad \lambda_{B\Gamma} = \frac{1-6}{7-6} = -5 \quad \text{δηλαδή } \lambda_{A\Delta} = \lambda_{B\Gamma} \quad \text{οπότε } A\Delta \parallel B\Gamma$$

Άρα $AB\Gamma\Delta$ παραλληλόγραμμο.

2. Η εξίσωση της $A\Gamma$ είναι της μορφής $y - y_0 = \lambda_{A\Gamma}(x - x_0)$. Είναι $\lambda_{A\Gamma} = \frac{1-3}{7-2} = -\frac{2}{5}$

Αντικαθιστούμε τις συντεταγμένες του σημείου A στην παραπάνω εξίσωση οπότε έχουμε:

$$y - 3 = -\frac{2}{5}(x - 2) \Leftrightarrow y - 3 = -\frac{2}{5}x + \frac{4}{5} \Leftrightarrow \boxed{y = -\frac{2}{5}x + \frac{19}{5}}$$

Η εξίσωση της $B\Delta$ είναι της μορφής $y - y_0 = \lambda_{B\Delta}(x - x_0)$. Είναι: $\lambda_{B\Delta} = \frac{-2-6}{3-6} = \frac{8}{3}$

Αντικαθιστούμε τις συντεταγμένες του σημείου B στην παραπάνω εξίσωση οπότε έχουμε:

$$y - 6 = \frac{8}{3}x - \frac{48}{3} \Leftrightarrow \boxed{y = \frac{8}{3}x - 10}$$

III. Βρίσκουμε την εξίσωση της πλευράς AB . Θα είναι της μορφής $y = \lambda_1 x + \beta_1$.

Προφανώς οι συντεταγμένες των A, B επαληθεύουν την παραπάνω εξίσωση οπότε:

$$\begin{cases} 3 = \lambda_1 + \beta_1 \\ 7 = \lambda_1 + \beta_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\lambda_1 = 4 \\ 4\lambda_1 + \beta_1 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{4}{3} \\ \beta_1 = \frac{5}{3} \end{cases}$$

$$\text{Άρα } AB: y = \frac{4}{3}x + \frac{5}{3} \Leftrightarrow \boxed{4x - 3y + 5 = 0}$$

Βρίσκουμε την εξίσωση της πλευράς $A\Delta$. Θα είναι της μορφής $y = \lambda_2 x + \beta_2$.

Όπως και παραπάνω έχουμε:

$$\begin{cases} 3 = \lambda_2 + \beta_2 \\ 2 = -2\lambda_2 + \beta_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\lambda_2 = 1 \\ -2\lambda_2 + \beta_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_2 = \frac{1}{3} \\ \beta_1 = \frac{8}{3} \end{cases}$$

Άρα $AD: y = \frac{1}{3}x + \frac{8}{3} \Leftrightarrow \boxed{x - 3y + 8 = 0}$

Η $B\Gamma$ είναι παράλληλη στην AD , άρα έχουν τους ίδιους συντελεστές διεύθυνσης.

Δηλαδή η $B\Gamma$ είναι της μορφής $y = \frac{1}{3}x + \beta_3$ και η εξίσωσή της επαληθεύεται από τις συντεταγμένες του σημείου B οπότε

$$7 = \frac{1}{3} \cdot 4 + \beta_3 \Leftrightarrow \beta_3 = 7 - \frac{4}{3} \Leftrightarrow \beta_3 = \frac{17}{3}$$

Άρα $B\Gamma: y = \frac{1}{3}x + \frac{17}{3} \Leftrightarrow \boxed{x - 3y + 17 = 0}$

Η $\Gamma\Delta$ είναι παράλληλη στην AB , άρα έχουν τους ίδιους συντελεστές διεύθυνσης.

Δηλαδή η $\Gamma\Delta$ είναι της μορφής $y = \frac{4}{3}x + \beta_4$ και η εξίσωσή της επαληθεύεται από τις συντεταγμένες του σημείου Δ οπότε $2 = \frac{4}{3}(-2) + \beta_4 \Leftrightarrow \beta_4 = 2 + \frac{8}{3} \Leftrightarrow \beta_4 = \frac{14}{3}$

Άρα $\Gamma\Delta: y = \frac{4}{3}x + \frac{14}{3} \Leftrightarrow \boxed{4x - 3y + 14 = 0}$

Οι συντεταγμένες του σημείου Γ που είναι σημείο τομής των $B\Gamma$ και $\Gamma\Delta$ βρίσκονται λύνοντας το σύστημα:

$$\begin{cases} x - 3y + 17 = 0 \\ 4x - 3y + 14 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y + 17 = 0 \\ -3x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 6 \end{cases}$$

Άρα το σημείο Γ έχει συντεταγμένες $\boxed{\Gamma(1, 6)}$

ΘΕΜΑ 4°

I. 1. $\overrightarrow{OB} = \lambda \overrightarrow{OA} \Rightarrow \text{προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{\beta} = \lambda \vec{\alpha} \Rightarrow \vec{\alpha} \text{προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{\beta} = \lambda \vec{\alpha}^2 \Rightarrow \vec{\alpha} \vec{\beta} = \lambda |\vec{\alpha}|^2 \Rightarrow \lambda = \frac{\vec{\alpha} \vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|^2}$

Οπότε $\text{προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{\beta} = \frac{\vec{\alpha} \vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|^2} \vec{\alpha}$

2. Είναι $|\vec{\alpha}| = 3$ και $|\vec{\beta}| = 4$

Άρα $|\vec{\alpha}|^2 + |\vec{\beta}|^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$

και επειδή $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}|^2 = 5^2 = 25$ είναι τελικά $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}|^2 = |\vec{\alpha}|^2 + |\vec{\beta}|^2$

οπότε $\vec{\alpha} \vec{\beta} = 0$ δηλαδή $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$

II. $\vec{\alpha} \vec{\beta} + \vec{\beta} \vec{\gamma} = 8 \Rightarrow |\vec{\alpha}| |\vec{\beta}| \sin(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) + |\vec{\beta}| |\vec{\gamma}| \sin(\widehat{\vec{\beta}, \vec{\gamma}}) = 8 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2 \cdot 2 \sin(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) + 2 \cdot 2 \sin(\widehat{\vec{\beta}, \vec{\gamma}}) = 8 \Rightarrow 4 \sin(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) + 4 \sin(\widehat{\vec{\beta}, \vec{\gamma}}) = 8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) + \sin(\widehat{\vec{\beta}, \vec{\gamma}}) = 2 \text{ οπότε } \sin(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = 1 \text{ και } \sin(\widehat{\vec{\beta}, \vec{\gamma}}) = 1$$

άρα $\vec{\alpha} \uparrow \vec{\beta}$ και $\vec{\beta} \uparrow \vec{\gamma}$ οπότε $\vec{\alpha} \uparrow \vec{\gamma}$ και επειδή έχουν και ίδια μέτρα, άρα $\vec{\alpha} = \vec{\beta} = \vec{\gamma}$

III. Είναι $\overrightarrow{AB} = (-1, -2), \overrightarrow{AI} = (1, 1)$ και $\overrightarrow{BI} = (2, 3)$

Έχουμε: $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AB} + \lambda \overrightarrow{BI} = (-1, -2) + \lambda(2, 3) = (-1 + 2\lambda, -2 + 3\lambda)$

Επειδή $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{BI}$ είναι $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BI} = 0$

Δηλαδή: $(-1 + 2\lambda)2 + (-2 + 3\lambda)3 = 0$

$$-2 + 4\lambda - 6 + 9\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{8}{13}$$

$$\text{άρα } \overrightarrow{AD} = \left(-1 + 2 \frac{8}{13}, -2 + 3 \frac{8}{13}\right) = \left(\frac{3}{13}, -\frac{2}{13}\right)$$

$$\text{οπότε } |\overrightarrow{AD}| = \sqrt{\left(\frac{3}{13}\right)^2 + \left(-\frac{2}{13}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{169} + \frac{4}{169}} = \sqrt{\frac{13}{169}} = \frac{\sqrt{13}}{13}$$

IV. Είναι γνωστό ότι $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$ και $|\vec{\alpha} - \vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$

$$\text{Συνεπώς } \frac{1}{|\vec{\alpha} + \vec{\beta}|} \geq \frac{1}{|\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|} \quad \frac{1}{|\vec{\alpha} - \vec{\beta}|} \geq \frac{1}{|\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|}$$

$$\text{Οπότε και } \frac{|\vec{\alpha}|}{|\vec{\alpha} + \vec{\beta}|} \geq \frac{|\vec{\alpha}|}{|\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|} \quad (1), \quad \frac{|\vec{\beta}|}{|\vec{\alpha} - \vec{\beta}|} \geq \frac{|\vec{\beta}|}{|\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|} \quad (2)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις (1) και (2) οπότε:

$$\frac{|\vec{\alpha}|}{|\vec{\alpha} + \vec{\beta}|} + \frac{|\vec{\beta}|}{|\vec{\alpha} - \vec{\beta}|} \geq \frac{|\vec{\alpha}|}{|\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|} + \frac{|\vec{\beta}|}{|\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|} = \frac{|\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|}{|\vec{\alpha} + \vec{\beta}|} = 1 \quad \text{άρα } \frac{|\vec{\alpha}|}{|\vec{\alpha} + \vec{\beta}|} + \frac{|\vec{\beta}|}{|\vec{\alpha} - \vec{\beta}|} \geq 1$$

